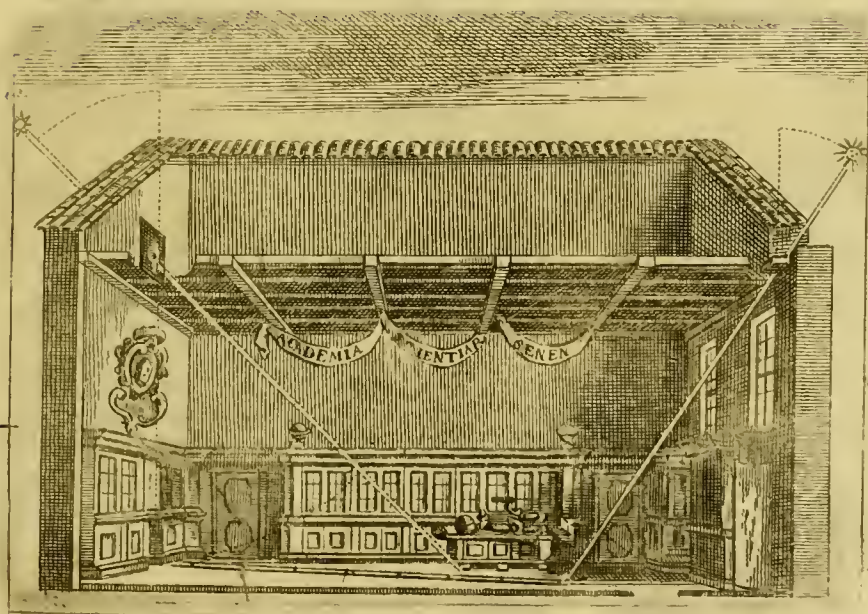
ATTI
DELL' ACCADEMIA
DELLE SCIENZE DI SIENA

DETTA

DE' FISIO-CRITICI

TOMO VIII.

SIENA 1800.

DAI TORCHJ PAZZINIANI

Con Approvazione

INDICE
DEGLI AUTORI, E LORO OPUSCOLI
Contenuti nel presente Volume.

AN-

ERRORI		CORREZIONI
Pag. 230. lin. 1. num. 12.	leggi	num. 13.
135. ARTICOLO III.		ARTICOLO IV.
198. ultima lin. §. XVII.		§. XVIII.
218. 6. alle		allo
218. 3. della nota vi		si

MEDITAZIONI ANALITICHE

INTORNO ALLA FORMOLA

$$\int dx\left(-\mathrm{L}x\right)^{\pm\frac{1}{2}}$$

Ed altre con essa strettamente congiunte (*).

La domanda fattami alcuni anni sono da un Matematico non Italiano a chi veramente appartenesse l' invenzione e dimostrazione diretta del valore dell' integrale $\int dx\left(-\mathrm{L}x\right)^{\pm\frac{1}{2}}$, ed altri consimili, posta la *variabile* $x=1$, cioè se a Leonardo Euler, che prima di tutti ragionò di tutti questi Integrali, discuoprendone il vario e difficile significato, nei Tomi V. e XI. dei vecchi *Atti* dell' Accademia di Pietroburgo (1), o piuttosto a Giovanni-Alberto suo figlio, che prese in parte a trattare dell' istesso argumento nel XVI. Volume delle *Memorie* dell' Accademia di Berlino (2), m' impegnò nell' esame di così eccellente scoperta, la quale semprepiù insegna a conoscere quanto grande ed estesa sia l'alleanza tra l' Iperbola e il Circolo, non meno che tra le Logaritmiche e le Parabole (3).

A Pri-

(*) *Questa Memoria fu presentata all' Accademia l'Anno* 1794.

(1) *Commentarii Academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitanæ ad an* M DCC. XXX. & XXXI. editi nel M. DCC. XXXVIII da pag. 36. a 58. = *De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt* = E parimente *Commentarii &c. ad annum* M. DCC XXXIX. pubblicati nel M. DCC. L. da pag. 3. a 32. = *De productis ex infinitis factoribus ortis* =.

(2) *Mémoires de l Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres pour l'année* M. DCC LX. stampate nel M. DCC. LXVII. da pag. 250. a 260 = *Sur le temps de la Chute d'un Corps attiré vers un centre des forces en raison reciproque des distances.*

(3) Prima di tutti, per quanto io sappia, dimostrai nel Capitolo VIII. della mia Opera *Magnitudinum exponentialium &c.* pubblicata del M. DCC. LXXXII., e segnatamente ai §§. 344. 45. 46, che la Logistica *comune* fosse una Parabola *primaria*

Primieramente feci riflettere allora nel mio carteggio come il Figlio, sebbene scrivesse molti anni dopo del Padre (4) in occasione di sciogliere un bel Problema Dinamico (5), fosse nelle conseguenze dedotte altrettanto d' accordo col Padre, quanto se avesse seguitate del tutto le di lui traccie (6); coll' insigne differenza però che i ritrovamenti del Padre erano nati da un metodo universale e diretto, mentre all' opposto le repliche fatte dal Figlio conoscevano la loro origine da un metodo particolare e precario, quale è quello delle *Interpolazioni* (7), applicato avanti di tutti da Giovanni

---

maria d' ordine o *grado* infinito. Questa nuova scoperta riceverà maggior lustro, ed estensione nel § III. applicandola alle Logaritmiche di tutti i *gradi*, che furono avanti d' ognuno considerate dal P. Abate D. Guido Grandi, e da Lorenzo Lorenzini sul principio del cadente Secolo XVIII.

(4) O si ponga mente alla *data* degli anni Accademici, o di quelli dell' edizione de' due Volumi, l' intervallo di tempo è sempre di presso a 30. anni.

(5) Cioè quello d'assegnare il valore del tempo t della discesa d' un *grave* affetto dalla *forza* espressa dalla *legge* della secenda *Nota* per la distanza a contata dal *centro*. Trovò dunque Euler il giovane che se quella *forza* alla distanza dal *centro* f pareggi la gravità terrestre g, si fa $t = \frac{1}{2\sqrt{fg}} \int \frac{dy}{\sqrt{L\left(\frac{a}{y}\right)}}$ posta y la distanza *variabile*, ed integrata la Formula di tal maniera che $t = 0$ quando $y = a$, e dopo l' integrazione sia fatta $y = 0$. Ciò vuol dire, come suggerisce l' istesso Euler, che mentre suppongasi $y = az$, il valore del *tempo* cercato dipenda da $\frac{a}{2\sqrt{fg}} \int \frac{dz}{\sqrt{L\left(\frac{1}{z}\right)}} = \frac{a}{2\sqrt{fg}} \int dz \left(-Lz\right)^{-\frac{1}{2}}$, purchè questo Integrale rimanga compreso tra i due *limiti* di $z = 0$, e $z = 1$, essendo g la discesa d' un *grave* presso la superficie della terra in un minuto secondo, e ben riflettendo che y scema, ed è conseguenza dy negativo.

(6) Conviene emendare alcuni sbagli di stampa occorsi nella *Memoria* di cui si parla, e non corretti nella Tavola o Indice degli errori apposta al Tomo citato, non essendovi in questa Tavola che la sola correzione d' un termine Greco. Per esempio a pag. 254. 255. $\int \frac{dz}{\sqrt{L-z}}$ in vece di $\int \frac{dz}{\sqrt{-Lz}}$. a 256. *de son Integrale* $dz(-Lz)^n$ piuttostochè *de son Integrale* $\int dz(-Lz)^n$, a 257. v. 9. $n = 1$ in vece di $n = 5$, in più luoghi *n nombre entier* senza la necessaria aggiunta di *positif*, a 255. $n = \frac{1}{2}$, e non come dovrebbe essere scritto $n = -\frac{1}{2}$ &c. Nemmeno i Volumi seguenti per il 1761. e 1762. fanno menzione di questi errori tipografici.

(7) Non intendo di togliere il pregio con questo discorso ai sublimi metodi d' *interpolare* pubblicati da M. De Condorcet nella sua bella Dissertazione del 1777. intitolata *Essai d'une Méthode pour trouver les loix des Phenomènes d'après les Observations* in fondo dell' Operetta notissima *Nouvelles Expériences sur la resistance des Fluides = par MM. D'Alembert, Condorcet, Bossut =*, e da M. de la Grange tanto

vanni Wallis e Lord Brouncker alla teoria delle *Serie* quando ancora non era noto il moderno Calcolo degli *Infiniti* (8).

Oltrediciò concepii nell' esame propostomi che l' istesso metodo rigoroso adoperato dal Padre si potesse non poco semplificare sino al segno di derivarlo immediatamente dalle Proposizioni che hanno servito di base alle *Tavole* degli Integrali somministrate dal Cav. Isacco Newton nel suo Trattato profondo *De Quadratura Curvarum* (9), che

A ij al

tanto nel Tomo delle *Memorie* dell' Accademia delle Scienze di Parigi per l' anno 1772., quanto nel Volume dell' Accademia di Berlino per il 1783. stampato nel 1785., dove si legge da pag. 179. sino a 290. il suo eccellente Ragionamento *Sur une méthode particulière d'approximation & d'interpolation*. Intendo solo di dire che siffatti metodi sussidiarj debbano allora aver luogo quando l'Analisi non somministri delle maniere rigorose e dirette per arrivare all' intento di sciogliere o applicare alla pratica un Problema assegnato. Unicamente M. De La Place negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Parigi per l' anno 1779. (*Mémoires sur les Suites* dalla pag. 207. alla 310.) ha dato il metodo rigoroso e diretto.

(8) Oltre quello che scrive M. Montucla a questo proposito nel Tomo II. dell' *Histoire des Mathematiques*, merita d' esser letto in fronte l' *Opuscolo Ciclometrico* di Wallis comprendente le tre Proposizioni (192. 193. 194 seguitando l'ordine della ristampa al termine dell' *Arithmetica Infinitorum &c.*) indirizzate da lui a Guglielmo Oughtred sino del 1655., ma trovate e comunicate ai Geometri nel 1652., il qual' anno può dirsi con tutta ragione la vera epoca del metodo d' *interpolare* o *intercalare* le serie di cui s' ignori il *termine generale*. La Proposizione 166. della precitata *Arithmetica &c.* è specialmente un capo d'opera; e questa insieme coll' altre ha meritato il bel Comento di Newton, che si legge nell' Articolo III. dell' *Opuscolo XI.* della Raccolta pubblicata da Giovanni Salvemini di Castiglion-Fiorentino. Rispetto al modo adoprato dal Visconte Brouncker nella sua *interpolazione* non ho veduta congettura migliore di quella scritta dell' Euler nel Tomo XI. dei vecchi *Commentarj* dell' Accademia di Pietroburgo, e segnatamente ai §§. 14. 15. 18. pag. 39 40 e 41. Un'altra maniera ingegnosissima d' *interpolare* venne poco dopo scoperta da Newton, ed è il suo *Methodus Differentialis* pubblicato la prima volta in Londra nel 1711., ma scritto sino del 1676., e degnamente poi comentato da M. Stirling, non meno che da Mac-Laurin nel Capitolo IV. del Libro II. *Treatise of Fluxions* §. 828. e seguenti.

(9) Anche questo *Trattato* si deve contare tra le giovanili scoperte dell' incomparabile Autore rimandandolo per lo meno all' istess' epoca del 1676., come apparisce dall' Articolo III. dell' *Opuscolo XI* citato nella *Nota* precedente, e nominatamente dalla pag. 341. e segg Il dotto Comento fattone da Matteo Stewart, le molte applicazioni che sino del 1708. il P. Reyneau pubblicò nella sua *Analyse démontrée* delle Formule Newtoniane con adattarle in forma di *canoni* ai differenziali *polinomj*, tutto ciò che M. De Bougainville ha trascritto da lui sopra di questo argumento unitamente alle correzioni date da M. Alembert, come si vede dal Cap IV. sino al X. del *Traité du Calcul Integral*, e l' uso più esteso che i PP. Le Seur e Jacquier, e prima di essi Tommaso Simpson (*Elemens du Calcul Inte-*

al dire dei più celebri Matematici, e soprattutti dei PP. Le Seur e Jacquier, sarà sempre una miniera inesausta di pellegrine bellezze in aggrandimento dell' Algebra (10) come il suo famoso *Binomio* (11).

Mi accadde in ultimo luogo di rintracciare e raccogliere alcune verità nuove, e non dispregevoli a mio giudizio sì per la loro applicazione alle Curve, sì per dilatar l' uso dello *zero* e dell' *infinito* nel Calcolo, con quell'accorgimento ed avvedutezza però, che è necessaria all' effetto di maneggiargli come le grandezze *finite*, e non esporsi ai pericoli, nei quali è facile d' inciampare senza guida certa e sicura (12).

Non avrei mai pensato a riordinar le mie carte di sciolte e confuse ch' ell' erano, e molto meno a render pubbliche le mie ricerche, se non mi fosse stato d' eccitamento un Problema, che si diceva venuto di là dai Monti, e specialmente diretto agli Analisti d' Italia. Il Problema, se ben mi ricordo, era esposto così dall' occulto Autore della disfida (13).

„ Trovare qual sia la Funzione φx dimodochè nell' unico caso „ di

---

Integral 1768. *I. Parte*, *The doctrine and application of Fluxions* 1750.) fecero delle medesime Formule, non saranno i fonti da me citati nella presente ricerca. Citerò unicamente il fedele interprete, e giusto ammiratore di Newton M Mac-Laurin, e precisamente il Capitolo III. del II. Libro delle *Flussioni* dal § 789. in poi, non meno che i Capitoli II. VIII. e IX. della Sezione I. del Tom. I. *Institutionum Calculi Integralis* del Sig Leonardo Euler come quelli, che servono di Commentario *perpetuo* ed amplissimo ai luoghi accennati dell' istesso Mac-Laurin.

(10) Basterà di leggere la *Nota* 276. della mia Opera = *Exercitatio Mathematica de Calculo integralium* =.

(11) Oltre delle moltiplici conseguenze dedotte dal *Binomio* Newtoniano nell' altra mia Opera *Magnitudinum Exponentialium &c.* ho raccolte diverse nuove applicazioni di esso nel mio *Diporto Analitico*, che spero in breve di pubblicare.

(12) Forse alcuna cosa da me altrove non vista sul maneggio sicuro dell' *infinito* e dello *zero* s' incontrerà nel §. I. e soprattutto nel § III.

(13) Non bisogna mai fidarsi dei Giornali, ed altri Fogli di minor conto, volendo ben misurare o il merito de' *Programmi* in materia di Scienze, o quello delle Nazioni e dei Dotti. Mi ricordo d' aver letto un fatto, che lo dimostra ad evidenza. Il gran Galilèo, quest' uomo sommo, e sommamente benemerito della sana Filosofia venne accusato da uno Scrittore imprudente di non aver saputo che uniti insieme tutti gli *angoli* d' un Triangolo rettilineo facesser due *retti* (Tomo I. a pag. 131. degli *Atti e Memorie inedite dell' Accademia del Cimento &c. pubblicate dal D. Giovanni Targioni Tozzetti* nel 1780).

„ di $x=1$ si verifichi l' Equazione e $S d x(\delta x)=1+\frac{1}{S\delta x(dx)}+\frac{1}{S dx(\delta x)^2}$

„ $+\frac{1}{Sdx(\delta x)^3}+\frac{1}{Sdx(\delta x)^4}+\frac{1}{Sdx(\delta x)^5}+\frac{1}{Sdx(\delta x)^6}+$ &c. all' infinito,

„ posta e eguale alla *base* dei logaritmi Neperiani o *iperbolici* „.

Non sò se il Problema annunziato fosse serio, o giocoso. Ma per quanto apparisse assai malagevole a prima vista, ben mi accorsi che si scioglieva nulladimeno con tutta facilità mediante la scoperta già fatta da Giovanni Bernoulli seniore sino del Secol passato in proposito dell' integrazione delle Funzioni di questa forma $Sx^m dx\,(Lx)^n$, e ciò col rendere $\delta x = L\left(\frac{1}{x}\right)$, intesa la Sigla L rappresentante dei logaritmi *iperbolici*, come intenderò sempre in appresso (14).

I veri sapienti (15) son certo che quando ancora mancasse ogni pregio di nuovità, giudicheranno del mio lavoro come di qualche importanza, avendo in mira d' ampliare la giurisdizione e l' uso d' uno dei principj fondamentali del Calcolo, qual' è quello dell' integrazione delle più semplici Formule *binomiali* conosciuta sino del M. DCC. IV. (16), col ricondurvi ed assoggettarvi dei ritrovati sublimi, che sino ad ora apparivano onninamente da esso disgiunti. Così

(14) Bernoulli non più tardi dell'anno 1697. possedeva il metodo d' integrare le Formule $x^m (Lx)^e\, dx$, come risulta dal paragone che si faccia degli Atti degli Eruditi di Lipsia dell'anno citato a pag 131., del Tomo I. della *Raccolta* delle sue Opere al num. XXXVI. pag. 185., e del §. XII. del num. CXLVIII. del Tomo III. a pag 381. 82. nell'eccellente Dissertazione che principia da pag. 376., ed à per titolo *Demonstratio methodi analyticæ*, *qua usus est* Jo: Bernoullius *pro determinanda aliqua quadratura exponentiali per seriem &c.*

(15) V' à un mezzo facile di ben distinguergli e non confonderli col volgo dei semidotti, ed è di vedere se siano stati soggetti alla satira dei loro contemporanei. Aristofane si giuocò di Socrate nelle sue *Nuvole;* e questi presente sempre alla Scena andava consolandosi seco stesso d'avervi udito più volte vituperare gli Dei. Raccontano del Misantròpo d'Atene *Timon ne fut coupable que pour s' etre déchainé contre des hommes pervers*. Ecco perchè Timone era in odio, ed all' incontro nella popolare stima Alcibiade. Ma siccome taluna volta possono esser soggetti al capriccio dell'effrenata persecuzione ancora gli sciocchi, quindi è che per separargli dagli Uomini grandi convenga attender di più al contegno che adoperan gli ultimi nel corrispondere ai tratti della velenosa calunnia. Lo insegna l'Autore dell *Esprit* (Tom I Disc. I. Cap. IV. pag. 37. ediz. del 1758). *Pour aimer les hommes, il faut en attendre peu: pour voir leurs défauts sans aigreur, il faut s'accoutumer à les leur pardonner, sentir que l'indulgence est une justice que la foible humanité est en droit d'exiger de la sagesse.*

(16) Questa è difatto l' epoca della prima edizione fatta in Londra del *Trattato* di Newton, del quale ò parlato di sopra. (*Isaaci Newtoni Opuscula &c.* T. I. nella Prefazione a pag. VII.).

Così era solito di pensare ed agire insieme con altri egregj Scrittori l'elegantissimo Matematico Giovanni-Enrico Lambert (17) mentre che lasciò scritte quelle auree parole = *Equidem his nil novi detegitur, cum tamen utile sit inventionum reserare fontes &c.* = Nel III. Volume degli *Atti* Elvetici (18). Dell' istessa opinione ha mostrato più modernamente di essere il Principe dei viventi Geometri ed onor grande d' Italia Luigi De La Grange allora quando tra le nuove *Memorie* pubblicate dall' Accademia di Berlino nel Tomo del M. DCC LXXIII. avendo inserita quella = *Sur l' attraction des Sphéroides Elliptiques* = (19) si applaudì seco stesso d' aver potuto una volta dopo di tanti inutili tentativi render suddite dell' Analisi *algebrica* le belle scoperte *sintetiche* fatte sino del M. DCC. XL. da Colin Mac-Laurin (20): soggezione anche più avvalorata dipoi da M. Krafft nel II. Volu-

---

(17) Sebbene il suo Elogio stampato del 1780. da pag. 72 a 90 nell' *Histoire* delle *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences & Belles Lettres = à Berlin* = per l'anno 1778. non sia molto favorevole alla profondità del sapere di questo Svizzero illustre, leggendovisi le parole seguenti (pag. 85) = *M. Lambert n'ignoroit rien en Géometrie, & il n'a rien fait que d'estimable dans ce genre, sans avoir peut-être la profondeur des vues ni même la dexterité du calcul qui caracterisent les trois ou quatre premiers Géometres du siècle* =, tuttavia dai suoi Scritti apparisce che per l'eleganza e chiarezza non la ceda nemmeno a Giovanni Bernoulli seniore, il quale al dire di M. D' Alembert (*Mélanges de Litterature, d' Histoire, & de Philosophie = à Amsterdam* 1767. = Tom. II. da pag. 11. a 67) non ebbe pari sino ai suoi tempi nell'esporre con invidiabile facilità le più sublimi e recondite speculazioni di Matematica. Senza parlare dell' ammirabile *Photométrie* bastano in pruova del mio argumento le tre bellissime Opere di Lambert = *Traité sur la route de la lumiere* = *Insigniores orbitæ Cometarum proprietates* del 1761. = *Beyträge zur angewandten Mathematik* =, l' ultima delle quali letteralmente tradotta significa *Aggiunta di ciò che manca alla Matematica*, e contien cose del maggior momento trattate colla massima semplicità.

(18) Tomo III. edito in Basilea del 1758 a pag. 128. = *Jo. Henrici Lamberti Observationes variæ in Mathesin puram* = Si legga soprattutto il § 19. a pag. 141.

(19) A pag. 121. Quantunque avesse discorso a lungo e sino alla pag. 149. per rivestire algebricamente tutte le scoperte fatte da Mac-Laurin, riprese ad illustrare l'istessa materia nella sua *Addition au Mémoire sur l'attraction des Sphéroïdes Elliptiques* pubblicata del 1717. nelle *Nouveaux Mémoires &c. = a Berlin* 1775. = da pag. 273. a 280.

(20) Vedansi il Tomo *Pour le Prix de* M. DCC. XL. *a Paris* M. DCC. XLI. delle Dissertazioni premiate *sur les flux & reflux de la Mer* dall'Accademia delle Scienze di Parigi a pag. 193 sino a 235., il Trattato delle Flussioni di Mac-Laurin nel Capo XIV. del Libro I. a pag. 96. del II. Volume, ed il T III. (Parte I.) dei Principj della Filosofia naturale di Newton col Comento perpetuo dei PP. Tommaso Le Seur e Francesco Jacquier a pag. 247. e segg. sino a 283 (*De caussa physica fluxus & refluxus maris*). Del rimanente dopo d'avere M. De La Grange encomiata moltissimo la scoperta (pag. 121.) *il faut avouer que cette partie de l'Ouvrage de M. Maclaurin est un chef-d'oeuvre de Géométrie, qu' on peut comparer à tout*

Volume degli *Atti* nuovissimi dell' Accademia di Pietroburgo per l' anno M. DCC. LXXXIV. (21). Questi esempj de' Matematici di prima sfera; e delle più insigni Società Filosofiche d' oltremare erano a mio parere bastevoli per autorizzare ancor me, se calcando una strada diversa dall' usata sin quì, da cui declinarono (nè saprei dire perchè) Leonardo Euler, e Mac-Laurin, quantunque, come in seguito mostrerò, vi fossero tanto vicini (22), venivo così ad illustrare, e forse a promuovere l' argumento propostomi sin da principio, ed accennato da me di passaggio nella *Nota* 138. dell'*Esercitazione matematica* pubblicata in quest' anno [23].

Desidero finalmente che i dotti sappiano come egli è stato, ed è sempre mio intendimento quello di rispettare senza misura il sapere di tutti gli Uomini grandi, dal sentimento dei quali possa alcuna volta accadere di allontanarmi [24]. La luce del Secolo deve molto del

---

tout ce qu'Archimede nous a laissé de plus beau & de plus ingenieux, pare che se la prenda con quelli dei seguaci di Newton, i quali sono devoti della Geometria degli Antichi, quando a pag. 122. egli scrive così *ce qui servira à detruire un des principaux argumens que les détracteurs de l'Analyse puissent apporter pour la rabaisser & pour prouver la supériorité de la méthode synthétique des Anciens*. Merita d' esser letto il Proemio di questa eccellente *Memoria*, che incomincia *Quelques avantages que l'Analyse algébrique ait sur la méthode géometrique des Anciens, qu'on appelle vulgairemeut, quoique fort improprement, Synthese &c.*, dove esso parla trall'altre di Tommaso Simpson, che si servì delle Serie Infinite per arrivare ai risultati medesimi di Mac-Laurin.

(21) *Sur la recherche de M. De La Grange concernant l'attraction des Spheroïdes Elliptiques* nelle *Nouveaux Mémoires de l' Académie des Sciences de Pétersbourg &c. avec l' Histoire de l'Académie jusqu' a l'année* 1784. Il dotto Autore risolve tutti i Problemi con quel metodo istesso delle tre Coordinate ortogonali, che M. De La Grange nella prima parte del suo lavoro analitico era stato obbligato di escludere e abbandonare attesa la somma complicazione e difficultà delle Formule, a cui conduceva. *Non omnibus omnia*. (*Essay relatif aux recherches de M. de la Grange sur l'attraction &c.* da 80. a 82. e da pag. 148. a 161. ediz. del 1788. Sono nell'istesso Volume le due Memorie *Commentatio de Curvis Tractoriis* (da pag. 28. a 36.), *De curvis Tractoriis compositis* (da 36. a 46.) di cui parla l' *Exercitatio Mathematica &c.* alla *Nota* 379. e pag. 294. 95.

(22) Ai numeri 21. 22. del II. §. e altrove.

(23) Vi si aggiunga l'altra *Nota* 348. sul fine *ne forte homines maleferiati blasphement*.

(24) Taluni mi sembrano troppo facili a tacciare d' orgoglio il dovere, cui obbliga la Verità, di non piegarsi che alla ragione in tutto ciò che possa essere della sua sfera. Per tutti costoro sarebbe un tessuto d' orgoglio la vita privata e pubblica dell' immortal Beniamino Franklin (*Esprit des Journaux &c.* (Nota 13.) *Mémoires de la vie privée de Beniamin Franklin &c. = à Paris* 1791 =) (da pag. 66. a 76). Costoro accuserebber di certo per eccesso d' orgoglio la franca risposta data da Lambert al Rè filosofo Federigo II. in Potzdam *Que savez-vous? — Tout, Sire-Comment l'avez-vous appris? — De moi-même* (a pag. 84. dell'Elogio citato nella 17.

del presente suo accrescimento alla moderata contradizione dei saggi [25]. Nel rimanente penso non altrimenti ch' Euripide [26]. *Je hais ces hommes inutiles qui n'ont d'autre mérite que de s'egayer aux dépens des sages qui les méprisent.*

COMENTO E PARALLELO

Dei due metodi adoprati dal Padre e Figlio Euler.

§. I.

1. QUando Euler il vecchio intraprese avanti di tutti la ricerca del *termine generale* della Serie-infinita 1 + 1 . 2 + 1. 2. 3 + 1. 2 3. 4 + 1. 2. 3. 4. ...... *n* + &c., essendo *n* l' indeterminata che serve d'*indice* per stabilire l'ordine o luogo dei *termini* progressivi, s'accorse subito che questa Serie fosse della classe delle *trascendenti*, cosicchè il suo *termine generale* non potesse sortire da uessun altro fonte fuori di quello della *Quadratura delle Curve* o sivvero delle *Funzioni algebriche* come dicono gli Analisti [27] Tuttavolta a forza di speculare la natura e carattere della Serie accennata, la quale appartiene al genere di quelle, che sono solite d' esser chiamate *hypergeometricæ*, fece un passo sommamente ingegnoso ed ardito, e fu di attingere dall'Infinito una Formula composta d' un infinito numero di *fattori*, la quale per gli *n* interi e *positivi* fosse in grado di rappresentar tutti i *termini* della Serie proposta [28]. Trovò difatto per *termine generale* della serie, di cui intendeva stabilire universalmente

---

la 17. *Nota*). Piegarsi alla grandezza dei nomi e non al valor delle cose vuol dir tradire sotto il pretesto di falsa prudenza il più nobile incarico, che imponga agli uomini la Società. Ampio e procelloso mare à sempre divisi i due regni della Verità e della Fortuna.

(25) Infatti degenera in vizio vestendosi all' Attica. = *La Jeunesse d'Athènes voyoit les combats des gens d'esprit avec le même plaisir qu'elle auroit vu ceux des animaux féroces* = (Tomo VI. al Capo LXVII. (*Socrate*) e pag. 119. del *Voyage du Jeune Anacharsis en Grèce* ediz. del 1790. ai Due-Ponti).

(26) Tomo precitato a pag. 189., sulla versione fattane dall' eruditissimo Sig. Abate Barthelemy.

(27) Volume V. dell'Accademia di St. Petersbourg a pag. 37. §. 3. *Arbitratus eram ante seriei 1, 2, 6, 24. &c. terminum generalem, si non algebraicum, tamen exponentialem dari. Sed postquam intellexissem terminos quosdam intermedios a quadratura circuli pendere, neque algebraicas neque exponentiales quantitates ad eum exprimendum idoneas esse cognovi.* (Si corregga l'errore della numerazione della pag. 39. sostituendovi il num 37.). E nel § 15. a pag. 47. *infra autem sequetur methodus eosdem terminos intermedios ad algebraicarum curvarum quadraturas reducendi.*

(28) Nel loco citato alla pag. 36. *incidi ..... in sequentem expressionem ....., quæ dictæ progressionis terminum ordine* n *exponit.*

mente la *legge*, l'espressione numerica elegantissima $\frac{(1^{1-n}.2^n)(2^{1-n}.3^n)}{(1+n)(2+n)}$ $\frac{(3^{1-n}.4^n)(4^{1-n}.5^n)(5^{1-n}.6^n)(6^{1-n}.7^n)}{(3+n)(4+n)(5+n)(6+n)}$ &c. la quale sebbene egli confessi [29] essere troppo laboriosa ed incomoda per assegnare i *termini* della Serie corrispondenti agli *indici* interi, e *positivi* (poichè dei *negativi* non credè mai nei precitati due Tomi di dover farne parola [30],) asserì nel medesimo tempo ch'ell'era di sommo uso per il ritrovamento di quelli, che appartenessero a degli *indici* frazionarj, non potendo l' Algebra esprimere in numeri *razionali* o *irrazionali* le Quantità *trascendenti* con altro mezzo, eccetto che quello di adoperare a tal fine delle Serie infinite.

2. Quanto si avveri nella seconda parte il preludio fatto dall' Euler lo vedremo trappoco nel Num. 6.; ma sia frattanto permesso d'accennar qui che molto meno elaborato sarebbe comparso quel *termine generale* eziandio per gli *indici* interi qualora gli avesse data quella *forma* più semplice e naturale, della quale è capace, cioè $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ 10.\ 11 \ldots\ldots\ldots\ldots co}{(1+n)(2+n)(3+n)(4+n)(5+n)(6+n)(7+n)(8+n)(9+n)(10+n)(11+n)\ldots\ldots(\infty+n)}$.

Che questa *forma* sia la medesima in sostanza dell'Euleriana ognuno lo concepirà facilmente subito che faccia prendere all' ultima il nuovo aspetto (ma *identico*) di $\frac{\left(\frac{1.2^n}{2^n-1}\right)\left(\frac{3^n}{3^n-1}\right)\left(\frac{4^n}{4^n-1}\right)\left(\frac{5^n}{5^n-1}\right)}{(1+n)\quad(2+n)\quad(3+n)\quad(4+n)}$ $\frac{\left(\frac{6^n}{6^n-1}\right)\left(\frac{7^n}{7^n-1}\right)\left(\frac{8^n}{8^n-1}\right)\left(\frac{9^n}{9^n-1}\right)\left(\frac{10^n}{10^n-1}\right)\left(\frac{11^n}{11^n-1}\right)\ldots\ldots\left(\frac{\infty^n}{\infty^n-1}\right)}{(5+n)\quad(6+n)\quad(7+n)\quad(8+n)\quad(9+n)\quad(10+n)\quad(11+n)\ldots(\infty+n)}$, sotto del quale aspetto è fuori di dubbio che le due Formule perfettamente combinino tra di loro. La mia *forma* però non à il merito solamente della maggiore semplicità, spogliando quella dell' Euler d' ogni estranea e superflua sublimità che comparisce a prima vista d' avere, ma à l'altro di più d' essere ricavata per così dire *intuitivamente*, e senza nessun' arte nè pensiero dalla natura e progresso

(29) Al §. 2. pag. 36. e 37. del loco citato. *Quanquam autem hæc expressio nullum usum habere videatur in inventione terminorum; tamen ad interpolationem ejus seriei, seu ad terminos, quorum indices sunt numeri fracti, egregie accomodari potest.*

(30) La prima volta ch' egli parlò degli *indici negativi* fù, per quanto io sappia, nel loco accennato dalla *Nota* 54.

dei *termini razionali* della Serie proposta. Nel modo infatti, col quale l'ò esposta, cioè col *numeratore* sempre costante, e vale a dire non *affetto* in sostanza dall' *indeterminata n*, ma sempre eguale al prodotto di tutti i numeri *naturali*, si fa chiaro che cominciando da *zero* quante *unità* si daranno a *n* nel *denominatore*, d'altrettanti dei primi numeri della *Serie naturale* anderà progressivamente mancando il *denominatore* medesimo, onde nasca per l'*indice n* il *quoziente* 1. 2. 3. 4. 5 ..... *n* composto di tante *cifre* del *numeratore*, quante rimangono fuori o per così dire spuntate dal *denominatore*. Ed intanto due volte si replica 1. la prima per l'*indice* 1, e la seconda per l'*indice* 0, a motivo che in quest'ultima essendo $n = 0$ si ripete nel *denominatore* l'istesso *numeratore*, e la comune Aritmetica insegna che in siffatto caso particolare si mantenga il *quoziente* medesimo o spuntando dal *denominatore* l'*unità* come quando $n = 1$, o lasciandovela come quando $n = 0$. Metodo più diretto e più *a priori* di questo per conseguire il *termine generale*, ed esser padroni di tutta la Serie proposta, nessuno a mio giudizio potrebbe mai immaginarlo. Egli è così a portata di tutti che se fosse questo il luogo di renderlo dilettevole, non che facile, suggerirebbe l'idea d'una Macchinetta composta di due sole *righe*, una delle quali scorrendo sotto dell'altra desse tosto a conoscere i *termini* progressivi della medesima Serie. Incisi nella *riga* immobile i numeri *naturali*, e nella mobile quelli affetti da *n*, ognun vede che facendola scorrere da sinistra a destra per tante divisioni di *caselle*, quante *unità* siano in *n*, nascerebbero dal *generale* tutti i *razionali* termini *particolari* scolpiti in quella parte della *riga* immobile, che a sinistra rimarrebbe sciolta o libera dalla mobile. Ebbero tempo fa non poco applauso dai Matematici le ingegnose *Macchine aritmetiche* di Biagio Pascal (31), e Gottofredo Leibnitz [32], nè furono all'età nostra mal' accolte dai dotti l'idea d'un nuovo Istrumento proposto da M. Rowning nel Volume LX. delle *Transazioni* della Real Società di Londra per trovar le radici di un' Equazione di qualsisia ordine o grado (33), e la Riga di Lodovico Wentz divisa in forma di *Scala di proporzione*, ed applicata a ri-

(31) *Oeuvres de Blaise Pascal a la Haye* 1779.

(32) *Miscellanea Berolinensia* Tom. I. Part. III. num. XXXI. (1749.) a pag. 318. e segg. sino a 321. G. G. L. *Brevis descriptio Machinæ Arithmeticæ cum Figura*; *quam vide Fig.* 73. L'Autore attesta d'averla presentata sino del 1673. alla Società Reale di Londra, e d'averne riscossa non poca lode da Antonio Arnaldo, Cristiano Huygens, e Melchisedecco Thevenot, non meno che da Ehrenfrido Tschirnhausen (*Medicina mentis &c.* second. ediz.), in quel tempo famosissimi Letterati e Geometri. Si legga alla pag. 218. *Specimen Machinæ &c.*

(33) *Directions for making a Machine for finding the Roots of Equations universally, with the manner of using it .... = to John Bewis =* a pag. 240. e segg. dell' edizione originale del 1771.

a risolvere praticamente col principio de' *Minimi* il famoso Problema delle due *Medie proporzionali* [34], per non dire di tante altre inventate o promosse dal fecondo ingegno di Lambert [35] Niuna cede però alla semplicità e naturalezza di quella, che ò di passaggio accennata.

3. Ci avverte l' Euler d'esser egli arrivato alla suddetta *forma*, e composizione del *termine generale* dopo avuto l' accorgimento che quantopiù i *termini* della Serie si discostavan dal primo, tantopiù avvicinavansi a vestire il carattere d'una Progressione geometrica [36]. Torna ad avvertire l'istesso parlando altrove (37) della Serie più generale $(f+g)+(f+g)(f+2g)+(f+g)(f+2g)(f+3g)+(f+g)(f+2g)(f+3g)(f+4g)+$ &c. la quale comprende la prima come caso singolarissimo quando cioè $f=0$, $g=1$. La verità di questa geometrica Progressione nasce dai Primi fondamenti del Calcolo, e venne praticata da Lord Giovanni Neper sino dal tempo, in cui immaginò i Logaritmi [38], essendo appoggiata al noto *canone* universale A : A $(f+ng)$: A $(f+ng)$ $[f+(n+1)g]$ ÷ subito che $n=\infty$, a motivo che allora $2n=2n+1$, $n^2=n^2+n$, o più brevemente $f+ng=f+(n+1)g$. D' altra parte il *termine generale* nel modo più semplice, col quale l' ò esposto al Num 2.,

---

(34) *Acta Helvetica Physico-Mathematico-Anatomico-Botanico-Medica &c. Volumen I.* = *Basileæ* 1751. a pag. 85. e segg. = *Ludovici Wentzii nova atque duplex solutio mechanica Problematis Deliaci* =.

(35) Più macchinista di Francesco Bacone da Verulamio ridusse a Macchina perfino l'arte di ragionare. Si veda il suo *Novum Organon* (1760.), la *Logique Algebrique*, l'*Architectonique*, e soprattutto il *Giornale* della sua vita scritto da se medesimo cominciando dal Maggio 1752. sino a quello del 1777. Tra i più moderni meritano d' esser letti nella Seconda Parte del Tomo LXXVII. delle *Philosophical Transactions For the Year* 1787 dalla pag. 246. a 253. al num. XXIII. *The Principles and illustaction of an advantageous Method of arranging the Differences of Logarithms, on lines graduated for the Purpose of computation* = *By Mr. William Nicholson, communicated by Sir Joseph Banks Bart* P. R. S., dove l' Autore perfeziona moltissimo le celebri *Scale* Logaritmiche di Edmondo Gunter.

(36) Alla pag. 36. del Tom. V. precitato dell'Accademia Imperiale di Pietroburgo si legge . . . *considerans quod ea* (Series) *in infinitum continuata tandem cum geometrica confundatur* . . . .

(37) Nel Tomo XI. degli *Atti* vecchi dell' istessa Imperiale Accademia a pag. 6. § 6. *Quoniam autem Progressio assumta tandem cum Geometrica confunditur &c.*

(38) Difatto sino del 1614. nelcalcolo dei suoi Logaritmi ed Antilogaritmi (*Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio* dedicata allo sfortunato Re Carlo I, allora Principe di Galles) dovette supporre le differenze dei Logaritmi proporzionali alle differenze dei Numeri molto grandi. L' istesso fece egualmente Enrico Briggs nell' *Arithmetica Logarithmica* pubblicata del 1624. Si veda a questo proposito la bella *Memoria* di M. De La Grange negli *Atti* di Berlino citati di sopra (*Nota* 7.), e segnatamente alle pag. 284. 288. e §§. 13. 20., dove espone ed amplifica il metodo tenuto da Briggs.

somministra parimente $\frac{B}{C} : \frac{B}{C(m+n)} : \frac{B}{C(m+n)[(m+1)+n]}$ ÷ mentre $n = \infty$, perchè $m+n = m+1+n$ qualunque sia m, e molto più in questo caso che ancora $m = \infty$ in virtù della *forma* dell' istesso *termine generale* adattata agli ultimi *termini* della Serie. Il *numeratore* B sempre fermo ed eguale a $1.2.3.4.5.....n....\infty$ è un Infinito *costante* dell' *ordine* $[\infty]$ sicuramente superiore a $\left(\frac{\infty}{2}\right)^{\frac{\infty}{2}}$ come quello che nasce dal *prodotto* $\infty(\infty-1)(\infty-2)(\infty-3)(\infty-4)(\infty-5).....$ &c., loche verrà confermato nel Num. 4. Non diversamente il *denominatore* $(1+n)(2+n)(3+n)(4+n)(5+n)....(\infty+n) = (\infty+n)(\infty+n-1)(\infty+n-2)$ $(\infty+n-3)(\infty+n-4)(\infty+n-5)....(\infty+n-n)$ &c. è un Infinito *variabile* dell'istess' *ordine* $[\int n . \infty]$. Di quì ne deriva che sebbene il *termine generale* abbia l'incomodo ed imbarazzo d' essere espresso per mezzo di due Infiniti (39), tuttavia essendo questi del medesimo *grado* e tra loro *comparabili*, si conseguisca in cambio d' un valor vago, ed indeterminato (come suole spesso accadere), e senza ricorrer nemmeno alla *regola* di Giovanni Bernoulli, o ad altri analitici artifizj consimili (40), il valore d' ogni *termine* della Serie sempre determinato e finito, cioè $= \frac{1}{\int n} = 1.2.3.4.5.......n$, sino a tanto che n si mantenga dentro del *limite* delle grandezze *finite*. Ma qualora $n = \infty$, si converte questo prodotto $(1+\infty)(2+\infty)(3+\infty)(4+\infty)$ $(5+\infty).....(2.\infty)$ nell' infinito dell' ordine più elevato $[\infty]$ e certamente superiore a ∞^{∞} siccome appartiene con tutta chiarezza dalla natura dell' ultima Serie composta d' infiniti *fattori* (41), e sarà di più avvalorato nel Num. 4. Questi ultimi *fattori* però nella maniera, colla quale è composto il *termine generale*, non intorbidano in

(39) *Ea quidem series in nullo casu abrumpitur neque si* n *est numerus integer neque si fractus &c.* sono parole di L. Euler al §. 1. pag. 36. del suddetto Tom V. di Pietroburgo quando ragiona del suo *termine generale*.

(40) *Perfectio regulæ suæ editæ in Libro Gallico* Analyse des infiniment petits Art. 163 *pro determinando valore fractionis, cujus numerator & denominator certo casu evanescunt.* (Atti di Lipsia d'Agosto del 1704. a pag 375., *Johannis Bernoullii Opera omnia &c. T. I. num. LXXI.* a pag. 401.). Come poi questa *regola* si adatti al caso degli Infiniti vedasi nell'eccellente Cap. XV. *De valoribus Functionum, quæ certis casibus videntur indeterminati.* (L. Eul. *Institutiones Calculi Differentialis*).

(41) Vale per questa Serie quell' avvertimento medesimo, che l'Euler comunicò agli Analisti nel §. 156. a pag. 118. del Cap. IX. del I. Libro o Volume *Introductionis in Analysin Infinitorum*.

in modo alcuno la sua primitiva chiarezza, nè fanno sì ch' ella vada smarrita nel grande abisso dell' Infinito. Imperciocchè o si crede permesso di spinger la Serie dei numeri *naturali* più in là dell' ∞, cioè di quell' Infinito *ordinario* $\frac{1}{1-1}$ che proviene dalla *Somma* d'innumerabili *unità* $1+1+1+1+1+1+1+$ &c. come par convenevole, e si affaccia alla mente di tutti pensando alla Serie *naturale* dei numeri, o si crede di aver diritto di procedere con questa Serie più oltre mediante i numeri $\infty+1$, $\infty+2$, $\infty+3$, ..., $\infty+n$ ...., $2.\infty$, e vale dire replicando l'istessa Serie colla giunta dell' Infinito, e così d'altre giunte, le quali avesser per capo $2.\infty.3.\infty$, $4.\infty$ ...., $m.\infty$ &c., ∞^2, $r.\infty^2$, ∞^3, $p.\infty^3$ .... ∞^r, $g.\infty^r$, ∞^∞, $f.\infty^\infty$, &c., che dopo d'alcune espressioni di Wallis (42) diedero origine a molte dispute tra i Matematici, e nominatamente agli Scritti polemici (43) di Pietro Varignon e del P. Abate Don Guido Grandi (44). Nel primo caso resta fermo il discorso fatto di sopra, e ferma in tutte le sue parti l'espressione chiarissima del *termine generale*. E nel secondo con quell' istesso diritto, in virtù del quale procederebbe più avanti la Serie dei numeri *naturali* nel *denominatore*, dovrebbe parimente procedere nel *numeratore*, di tal maniera che $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ldots.n\ldots\ldots\ldots}{(1+n)\ (2+n)\ (3+n)\ (4+n)\ (5+n)\ldots}$

$\frac{\infty\ (\infty+1)(\infty+2)(\infty+3)\ (\infty+4)\ldots\ (\infty+n)\ldots\ 2.\infty}{\ldots\infty(\infty+1)(\infty+2)(\infty+3)\ (\infty+4)\ldots\ (\infty+n)\ldots\ 2.\infty}$ verrebbe ad essere la nuova *forma* del *termine generale*, ma di valore però (siccome ognun vede) equivalente alla prima.

4. Intanto si fa palese che sin da principio di questa ricerca abbiano subito luogo di venire sott' occhio le due belle Serie $(\infty-1)(\infty-2)(\infty-3)(\infty-4)(\infty-5)\ldots(\infty-n)$; e $(\infty+1)(\infty+2)(\infty+3)(\infty+4)(\infty+5)\ldots(\infty+n)$. Degli elementi dell' ultima occorrerà di parlarne più a lungo nel §. III. Ma gioverà prima di tutto por men-

(42) *Arithmetica Infinitorum &c. anno* 1655. *typis edita*. Nella Proposizione CIV. egli scrisse *Ratio plusquam infinita, qualem nempe habere supponatur numerus positivus ad numerum negativum, sive minorem nihilo*. Ma nello Scolio della Proposizione CI. aveva premesso *vel etiam, si id sine soloecismo dici possit, majorem quam infinitam (rationem)*.

(43) Un Greculo moderno direbbe di *genere eristico*. (Num 44. Nov. Let. Fior. del 1791. a pag. 703. &c.) (*Nota* 125.)

(44) *Prostasis ad exceptiones Cl. Varignonii. Libro de Infinitis Infinitorum oppositas = Pisis* 1713. =

mente che queste due Serie siano eguali sempre tra loro, cioè l' una e l' altra eguali a ∞^n sino a tanto che n non esca dalla classe dei numeri interi *finiti*, e vale a dire sino a tanto che sia *finito* il numero de' *fattori*; questa eguaglianza cessando però subitochè $n = \infty$, o sivvero *infinito* sia il numero dei *fattori*. Nè tampoco dal valore di quelle Serie eguale a ∞^∞ si può giustamente passare a dedurre che diventato *infinito* il numero dei *fattori*, o sivvero rendutosi $n = \infty$ vengano a pareggiare ∞^∞. Rispetto alla seconda non è difatto malagevole a vedersi che l' Infinitinomio $\infty^\infty +$
$A\,\infty^{\infty-1} + B\,\infty^{\infty-2} + C\,\infty^{\infty-3} + \ldots\ldots + 1.2.3.4.5.\ldots\ldots\infty$

per motivo di $A = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots + \infty = \frac{\infty^2 + \infty}{2}$

sino dal 2°. termine superi l' ordine ∞^∞, e salga all'altro $\frac{\infty^{\infty+1}}{2}$,

il quale stà a ∞^∞ come $\infty : 2$. Ed in proposito della prima, ella perfettamente combina, aggiungendovi il *fattore* ∞, coll' ultimo termine dell' istesso Infinitinomio, non essendo diversa dalla Serie *naturale* dei numeri contati con ordine retrogrado, e perciò ben lontana dall' eguagliare, non che superare ∞^∞, siccome ò avvertito nel numero precedente. A corroborare questo argumento, non meno che l' importanza dell' osservazione spiegata, concorre mirabilmente la *regola* nota del Binomio di Newton, la quale insegna che

$$2^\infty = (1+1)^\infty = 1 + \frac{\infty}{1} + \frac{\infty^2}{1.2} + \frac{\infty^3}{1.2.3} + \frac{\infty^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots\ldots$$

$+ \frac{\infty(\infty-1)(\infty-2)(\infty-3)(\infty-4)\ldots 1}{1.2.3.4.5\ldots\ldots\ldots\infty}$ dove l' ultimo termine $= 1$, ed

in conseguenza il suo *numeratore* come eguale al *denominatore* non può non essere inferiore di grado a ∞^∞ (quantunque riposando sulla legge delle *potenze* degli altri *numeratori* facilmente portasse all' inganno) [45], e si conferma sciogliendo nelle sue ragioni *componenti*

la *composta* $\frac{\infty}{1} . \frac{\infty}{2} . \frac{\infty}{3} . \frac{\infty}{4} . \frac{\infty}{5} . \frac{\infty}{6} . \frac{\infty}{7} \ldots\ldots \frac{\infty}{\infty}$, A consimil *forma* di *fattori* innumerevoli si riduce eziandio il predetto *termine generale*, nè debbo omettere che presentandolo come fece l' Euler, i *ter-*

---

(45) Leggansi specialmente nel Capitolo I. della mia Opera, di cui parla la *Nota* 3., ai §§. 36. e 39. alle pag. 32. 37. e 38.

termini particolari (eccettuati quelli per gli *indici* o, 1) acquistino la *foama* seguente

$$n=2 \quad \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{5\cdot 5}{4\cdot 6}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot \&c. = 1.\ 2\left(\frac{\infty}{\infty+1}\right) = 1.\ 2,$$

$$n=3 \quad \frac{2\cdot 2\cdot 2}{1\cdot 1\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 3\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 5}\cdot\frac{4\cdot 4\cdot 4}{3\cdot 3\cdot 6}\cdot\frac{5\cdot 5\cdot 5}{4\cdot 4\cdot 7}\cdot\frac{6\cdot 6\cdot 6}{5\cdot 5\cdot 8}\cdot \&c. = \ldots\ldots\ldots\ldots 1.\ 2.\ 3.\left(\frac{\infty^2}{(\infty+1)(\infty+2)}\right) = 1.\ 2.\ 3,$$

$$n=4 \quad \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{1\cdot 1\cdot 1\cdot 5}\cdot\frac{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 6}\cdot\frac{4\cdot 4\cdot 4\cdot 4}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 7}\cdot\frac{5\cdot 5\cdot 5\cdot 5}{4\cdot 4\cdot 4\cdot 8}\cdot\frac{6\cdot 6\cdot 6\cdot 6}{5\cdot 5\cdot 5\cdot 9}\cdot \&c. = 1.2.3.4.\left(\frac{\infty^3}{(\infty+1)(\infty+2)(\infty+3)}\right) = 1.2.3.4,\ \&c.,$$

e generalmente $1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ldots n\left(\frac{\infty^{n-1}}{(\infty+1)(\infty+2)(\infty+3)(\infty+4)\ldots(\infty+n-1)}\right)$ $= 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ldots\ldots n$. Questa *regola*, oltre delle due predette eccezioni, fallisce ancora nel *caso* di $n=\infty$ per i motivi addotti di sopra. Ed ecco come la *forma* Euleriana conduca necessariamente a considerare grado a grado la Serie $(\infty+1)(\infty+2)(\infty+3)(\infty+4)(\infty+5)(\infty+6)(\infty+7)$ &c., ma in modo diverso da quello, cui porta la *forma* più semplice del *termine generale* da me proposta e spiegata. Non concepisco però coll' istessa chiarezza, per qual ragione il Sig. Euler asserisse (46) che nulla più di un'*approssimazione* si potesse sperare di conseguire dal suo *termine generale* cercando i *termini* corrispondenti agli *indici* interi e *positivi*, quando io trovo al contrario dalla *legge*, che osservano quei *fattori* innumerevoli, non il *prossimo*, ma il perfetto valore di ciascheduno dei *termini particolari*, in virtù dell' eguaglianza indubitata che regna per la dottrina dei *limiti* tra i *numeratori*, e *denominatori* degli ultimi *fattori* infiniti (47).

5. Ri-

(1) *Sed* illa Series *ad quemvis terminum inveniendum tantummodo approximationes suppeditat*, *nisi excipiantur casus* $n=0$ & $n=1$, *quibus ea actu abit in* 1. (T. V. di Pietroburgo §. 1. a pag. 36) Αἱ δεύτεραι φροντίδες σοφώτεραι (Eur. Hipp.).

(47) Giovanni Wallis fu forse il primo di tutti a parlar questa lingua „ $\frac{1}{\infty}$ „ (*pars infinitè parva*) *habenda erit pro nihilo .... Nam* ∞, $\infty+1$, $\infty-1$ *perinde* „ *sunt* „ come dice lo Scolio della Proposizione 182. della di lui Opera accennata dalla *Nota* (42).

5. Ridotto adesso di tanta semplicità e sicurezza il termine generale della Serie proposta si fà molto agevole il modo d'*intercalare* la medesima Serie, o d'investigare qualunque altro *termine* che abbia per *indice* dei numeri diversi dagli *interi positivi*, come *frazionarj*, *irrazionali*, *trascendenti*, ed eziandio *negativi*. La difficoltà non consiste più nella Serie, la cui indole, natura, e carattere ormai conoscendosi per mezzo del *termine generale*, somministrano sempre ed in ogni caso il *termine particolare* intermedio rappresentato da infiniti *fattori*, ma si risolve unicamente nell' Algebra, dalla quale dipende (tutte le volte che riesca fattibile) assegnare quell' Area, o Funzione, che sia equivalente al prodotto dei suddetti *fattori* infiniti. Euler sopra di tutti promosse questa bella Teoria tanto nelle antiche e moderne *Collezioni Accademiche* per mezzo delle *Quadrature* (48), quando nel I. Volume dell'*Introduzione all'Analisi degl' Infiniti* (49) indipendentemente dal Calcolo delle *Flussioni*. Apparirà dai due seguenti §§. quanta copia derivi di verità geometriche ed analitiche da questa sola speculazione, e quante delle già note ne discendano felicemente, o si confermino a vicenda, e ricevano nuova luce. Giova però avanti di seguitar passo a passo il metodo tenuto dall' Euler fermarsi a considerare come facilmente si manifesti anche al disattento osservatore la stretta corrispondenza che debbano aver col Circolo alcuni dei *termini* da *intercalare* nella Serie proposta. E difatto risalta subito agli occhi di tutti che il *numeratore* sempre *costante* del *termine generale*, semplificato da me nella maniera spiegata al Num 2., cioè 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. . . . . . oo, altro non sia che il prodotto della metà di ciascheduno degli infiniti *fattori* della *radice quadra* del *numeratore* della Serie Wallisiana conosciutissima conducente alla *Quadratura* del Circolo, la qual Serie fu la prima di questa *forma* a vedersi negli Scritti dei Matematici (50). Se dunque accada che in alcuno dei valori

(48) Nel Tom. XI. dei vecchi *Commentarj* luogo citato dalla *Nota* (1), ed in oltre nei §§. 15. 16. a pag. 40. (*De Fractionibus continuis Observationes*) dove generalizza le Serie di Brouncker e Wallis; nei *Commentarj* della R. Accademia di Berlino per l'anno 1761. stampati del 1768. da pag. 83. a 107. *Remarques sur un beau rapport entre les Séries des Puissances tant directes que réciproques*; nel Tom. III. delle *Mélanges de Turin* da pag. 156. a 178. della 2.ª numerazione *Observationes circa Integralia Formularum &c. &c.*

(49) Cap IX. dal §. 155. e pag. 117. in poi, e quindi Cap. X. e XI.

(50) E' molto lusinghevole per la Toscana che le profonde speculazioni del Wallis intorno alla quadratura del Circolo (come egli stesso confessa nella sua Lettera dedicatoria in data del 19. di Luglio 1655., che precede l'Opera summentovata nella *Nota* (42)) nascessero dalla lettura dell' Opere dell' immortale Torricelli Matematico del G. D. Ferdinando II., stampate del 1644. in Firenze. E non è meno onorevole a mio giudizio per Wallis che Carlo

lori innumerevoli dell' *indice n* ancora il *denominatore variabile* dell' istesso *termine generale* si converta nel prodotto delle metà di tutti i numeri dispari contati coll'ordine loro *naturale*, che torna a dire nel prodotto $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{17}{2} \ldots, \ldots \frac{2.\infty-1}{2}$, cioè nel prodotto della metà d'ognuno degli infiniti *fattori* componenti la *radice quadra* del *denominatore* della medesima Serie di Wallis, verrà da nascere allora qual *termine particolare* della Serie proposta quello espresso così $\frac{\frac{1}{1}}{2} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{2} \cdot \frac{\frac{3}{5}}{2} \cdot \frac{\frac{4}{7}}{2} \cdot \frac{\frac{5}{9}}{2} \cdot \frac{\frac{6}{11}}{2} \cdot \frac{\frac{7}{13}}{2} \cdot \frac{\frac{8}{15}}{2} \cdot \frac{\frac{9}{17}}{2} \ldots \frac{\sqrt{\infty}}{\frac{2.\infty-1}{2}}$, o sivvero con maggiore semplicità $\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{9} \ldots \frac{12}{11} \cdot \frac{14}{13} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{18}{17} \ldots \frac{2\sqrt{\infty}}{2.\infty-1} = \sqrt{\frac{4}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{14}{13} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{16}{17} \cdot \frac{18}{17} \ldots \frac{2 \cdot \infty}{2.\infty-1}} = 2\sqrt{A}$, posta la *Sigla* A per l' Area d' un Circolo, di cui il diametro sia eguale a 1 (51) $= \sqrt{C}$ mentre C rappresenti la Circonferenza circolare riportata

Carlo Cavendish, e Guglielmo Oughtred (Autore del Libro intitolato *Clavis mathematica*) promuovessero sino del 1635. con minor frutto di lui le dottrine di Galilèo Galilei e di F. Bonaventura Cavalieri, ed anzi che gli restassero indietro (siccome afferma) Setho Ward, Lorenzo Rook, Riccardo Rawlinson, Roberto Wood, e Cristoforo Wren, famosissimi Matematici contemporanei.

(51) Wallis trovò $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{11} \cdot$ &c. $= A$ [si veda il loco citato, ed Euler nel Tomo XI. di Pietroburgo tra i primi a pag. 5. §. 4., come altresì nel §. 185. del Volume I. *Introductionis in Analysin Infinitorum* a pag. 146.] Dunque $4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{11}$ &c. $= 4$ A. [Si vedano ancora le *Additions* di M. De La Grange a pag. 381. del Tomo II. edizione del 1774. dell' Algebra d' Euler *Vollständige Anleitung zur Algebra*]. [Emendato però lo sbaglio di stampa con surrogare 7. al terzo 5.].

tata all' istesso diametro (52). E' vero che la Serie degli infiniti fattori $\frac{2}{1}.\frac{4}{3}.\frac{6}{5}.\frac{8}{7}.\frac{10}{9}.\frac{12}{11}.\frac{14}{13}.\frac{16}{15}.\frac{18}{17}\ldots\ldots\frac{2.\infty}{2.\infty-1}$ subito si presenterebbe così $\sqrt{\frac{2}{1}.\frac{2}{1}.\frac{4}{3}.\frac{4}{3}.\frac{6}{5}.\frac{6}{5}.\frac{8}{7}.\frac{8}{7}.\frac{10}{9}.\frac{10}{9}.\frac{12}{11}.\frac{12}{11}.\frac{14}{13}.\frac{14}{13}.\frac{16}{15}.\frac{16}{15}.\frac{18}{17}.\frac{18}{17}\ldots\ldots\frac{2.\infty}{2.\infty-1}.\frac{2.\infty}{2.\infty-1}}$. Ma per evitar questo equivoco conviene di rammentarsi come nel modo, col quale ò dedotto al Num. 2. dal *numeratore* del *termine generale* Euleriano il mio sommamente più semplice sia chiaro che quando dovesse finir la Serie 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. . . . . . n . . . . . . ∞ a qualunque suo *termine* n, finirebbe nel caso speciale, di cui parliamo, in $n.\, n^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$; laonde $\frac{2}{1}.\frac{4}{3}.\frac{6}{5}.\frac{8}{7}.\frac{10}{9}.\frac{12}{11}.\frac{14}{13}.\frac{16}{15}.\frac{18}{17}\ldots\ldots\frac{2.\infty-2}{2.\infty-1}.\,2\sqrt{\infty}$ viene ad essere la vera e rigorosa espressione del valore cercato, che necessita in conseguenza a disporre i termini del suo Quadrato nell' ordine della Serie di Wallis [53]. Ciò sia detto una volta per sempre, contuttochè in ogni altro caso particolare volendo inoltrati i nostri pensieri sino al segno di conoscere e ſtabilire la *forma* di queste Serie in ordine ai *termini*, i quali appartengono all' *Infinito*, potessimo col metodo istesso egualmente rendere minuto conto e ragione della *forma* o composizione analitica di quei *termini* ultimi, che oltrepassino il *limite* dei *finiti*.

6. Non fa di meſtiero specular molto per accertarsi che il *caso* del Num°. precedente sia quello dell' indice $-\frac{1}{2}$. Difatto in esso solo accade che il *denominatore* del *termine generale* cioè $(1+n)\,(2+n)\,(3+n)\,(4+n)\,(5+n)\,(6+n)\,(7+n)\,(8+n)\,(9+n)\ldots\ldots\ldots(\infty+n)$ divenga

(52) pare che debba esser corretto il loco citato dell' Euler *Introductio &c.*, dove parlando della Serie $\frac{2}{1}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{5}.\frac{6}{7}.\frac{8}{7}.\frac{8}{9}.\frac{10}{9}.\frac{10}{11}.\frac{12}{11}$.&c. soggiunge *quæ est expressio pro Peripheria Circuli, quam Wallisius invenit in Arithmetica Infinitorum*, in cambio di *Semiperipheria* riportata al diametro 1. Per maggior lume di tutto questo si consulti la *Nota* 131.

(53) Mac-Laurin a pag. 255. linea 15. Tom. II. del *Traité des Fluxions* edizione del 1749.

ga $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{2}\right)\left(4-\frac{1}{2}\right)\left(5-\frac{1}{2}\right)\left(6-\frac{1}{2}\right)\left(7-\frac{1}{2}\right)\left(8-\frac{1}{2}\right)$
$\left(9-\frac{1}{2}\right)\left(10-\frac{1}{2}\right)\ldots\ldots\left(\infty-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{11}{2}\cdot\frac{13}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot$
$\frac{17}{2}\cdot\frac{19}{2}\ldots\ldots\frac{2.\infty-1}{2}$ siccom' era l' intendimento poc' anzi propostosi.
Quindi è che sebbene la ricerca del *termine* della Serie Euleriana, il quale corrisponda all'*indice* $-\frac{1}{2}$, sembrasse più difficoltosa d'ogni altra come quella che mira ad investigare il valore d' un *termine* spettante agli *indici negativi*, tuttavia in virtù del possesso del *termine generale*, e della maniera facile, nitida, e pronta di disporlo nell'ordine sopraindicato si possa dire per il contrario che vada in traccia del primo e più semplice di tutti i *termini* da *intercalare*. Euler non accennò questo *termine* nei luoghi citati, perchè allora non ebbe altro scopo fuori di quello di definire i *termini* della sua Serie corrispondenti agli *indici positivi*; ma non è meno vero che i suoi principj medesimi ed il suo istesso *termine generale* ve l'avrebbero immediatamente condotto quando avesse rivolta la mente dalla parte degli *indici negativi*. E difatto, subitochè quel gran Matematico speculò sopra i termini della Serie, i quali corrispondevano ad alcuni degli *Indici negativi* e nominatamente a $-\frac{1}{2}$, come fece nel Tomo XVII. degli *Atti* dell'Accademia di Berlino [54], diede sicuro riscontro di possederlo con affermare [55] che il *termine* della Serie attenente all' indice $\frac{1}{2}$ fosse eguale alla metà di quello relativo all' indice $-\frac{1}{2}$, cioè $(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})$, ed in conseguenza essendo il primo $=\sqrt{A}=\frac{1}{2}\sqrt{C}$ in grazia di ciò che vedremo trappoco, veniva l'altro ad essere eguale a $2\sqrt{A}=\sqrt{C}$ come sopra. Questa scoperta era stata fatta da lui assai di buon' ora: imperocchè la *Memoria*, in cui ell'è contenuta, à la data del M. DCC. XLIX., torna a dire anteriore di molti anni alla citata *Dissertazione* del Figlio [56]. Rispetto agli *indici positivi* Euler il padre colla sola guida del *termine generale* [57] notò il caso di $n=\frac{1}{2}$, l' altro di $n=\frac{3}{2}$, ed avrebbe parimente

(54) Nella Dissertazione accennata dalla Nota (48.) al §. 14. e pag. 98.

(55) Loco citato .... *& partant notre expression* $\frac{(-\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}$ *devient effectivement* $=1$.

(56) Il titolo dell'annunziata *Dissertazione* indica così la sua Data *lû en* 1749. Dunque almeno undici anni prima del Tomo per il 1760. indicato nella *Nota* (2).

(57) Tomo V. di Pietroburgo (come sopra) al §. 11. pag. 44. in seguito del metodo tenuto alla pag. 37. Di nuovo al §. 17. pp. 48. 49., e nel summentovato Tom. XI. coll' istesso metodo generalizzato a pag. 7. e §. 7.

rimente potuto senza ricorrere al Calcolo Infinitesimale [siccome poi fece] assegnare il valore di cento altri *termini intercalati*, perchè sebbene espresso con meno semplicità, possedeva il *termine generale*, e vale a dire la chiave analitica della sua Serie. Nulla infatti v' à di più facile, quanto trovare qualunque *termine* della medesima Serie, di cui l'*indice* sia $\frac{n'}{2}$, posto n' uno dei numeri *positivi* dispari della Progressione *naturale* aritmetica. Così se $n' = 1$, all' *indice* $\frac{1}{2}$ apparterrà come *termine* particolare e specifico $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ \ldots\ldots\ \infty}{\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}.\frac{9}{2}.\frac{11}{2}.\frac{13}{2}.\frac{15}{2}.\frac{17}{2}.\frac{19}{2}\ldots\frac{2.\infty+1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ 10.\ldots\ \infty}{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}.\frac{9}{2}.\frac{11}{2}.\frac{13}{2}.\frac{15}{2}.\frac{17}{2}.\frac{19}{2}\ldots\frac{2.\infty-1}{2}}\right)$ $= \frac{1}{2}.2\sqrt{A} = \sqrt{A} = \frac{1}{2}\sqrt{C}$ in virtù delle cose poc' anzi premesse e provate. Parimente se $n' = 3$, all' *indice* $\frac{3}{2}$ corrisponderà qual *termine intercalato* $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ \ldots\ \infty}{\frac{5}{2}.\frac{7}{2}.\frac{9}{2}.\frac{11}{2}.\frac{13}{2}.\frac{15}{2}.\frac{17}{2}.\frac{19}{2}.\frac{21}{2}\ldots\frac{2.\infty+3}{2}} = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}$ $\left(\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ 10.\ 11.\ldots\ \infty}{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}.\frac{9}{2}.\frac{11}{2}.\frac{13}{2}.\frac{15}{2}.\frac{17}{2}.\frac{19}{2}.\frac{21}{2}\ldots\frac{2.\infty-1}{2}}\right) = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}.$ $2.\sqrt{A} = \frac{3}{2}\sqrt{A} = \frac{1.3}{2\ 2}.\sqrt{C}$. Nè solo questi valori da me trovati con ammirabile facilità combinano con quelli dell' Euler [58], ma è da notarsi di più il medesimo Euler avanti di sperimentare il Sistema delle *Quadrature*, che glieli fece conoscere in un modo *indiretto*, e piuttosto compilato anzi che nò [59], gli deducesse dal *termine generale*

(58) Oltre di questi termini espressi colle *Funzioni* dell' Area del Circolo adopera ancora egli stesso la circolare Circonferenza, come al §. 17. pp. 48. 49. del precitato Tom. V. dell' Accademia di Pietroburgo, dove rammenta $A = \frac{1}{4}p$, $\sqrt{A} = \frac{1}{2}\sqrt{p}$. Il metodo, che quì ò adoperato, e poco diverso da quello che usò L'Euler in proposito delle elegantissime Serie di Goldbach. (*Variæ observationes circa Series infinitas &c.* nel Tom. IX. di Pietroburgo per l'anno 1737).

(59) Lo confessa l'Autore medesimo al §. 15. pag. 47. del Tomo suddetto = *Hinc quidem idem concludere non licet ob defectum Analysis &c.* = dopo d'aver chiamato il suo metodo *operosissimam*. Per mezzo del Calcolo Integrale gli convenne

nerale [60]. In conferma di ciò, prendendo di nuovo ad esaminare l' istesso argumento, siccome egli fece alcuni anni dopo nel Tomo XI. dei più antichi *Commentarj* dell' Accademia di Pietroburgo [61], e volendo dar conto del valore del *termine* da *intercalare* per l' *indice* $\frac{1}{2}$ della Serie $(f+g)+(f+g)(f+2g)+(f+g)(f+2g)(f+3g)+(f+g)(f+2g)(f+3g)(f+4g)+$ &c. rammentata nei Numeri 3. e 13.,

lo derivò dalla *forma* $\sqrt{f+g}\cdot\sqrt{\frac{(f+g)\,(f+2g)(f+2g)(f+3g)(f+3g)\,(f+4g)}{(f+\frac{3}{2}g)(f+\frac{3}{2}g)(f+\frac{5}{2}g)(f+\frac{5}{2}g)(f+\frac{7}{2}g)\,(f+\frac{7}{2}g)}\;\frac{(f+4g)(f+5g)\,(f+5g)\,(f+6g)\ \&c.}{(f+\frac{9}{2}g)(f+\frac{9}{2}g)\,(f+\frac{11}{2}g)(f+\frac{11}{2}g)\ \&c.}}$ composta d' infiniti *fattori*. La qual *forma* nel caso particolare superiormente contemplato di $f = 0$, e $g = 1$

somministra $\sqrt{\frac{1.\ 2.\ 2.\ 3.\ 3.\ 4.\ 4.\ 5.\ 5.\ 6.\ldots}{\frac{3}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}.\frac{7}{2}.\frac{9}{2}.\frac{9}{2}.\frac{11}{2}.\frac{11}{2}\ldots}} = \frac{1.2.3.4.5.\sqrt{6}\ldots}{\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}.\frac{9}{2}.\frac{11}{2}\ldots}$,

cioè quel medesimo *termine* corrispondente all' *indice* $\frac{1}{2}$ nella Serie infinita $1+1.2+1.2.3+1.2.3.4+$ &c., quale appunto ò poco prima assegnato con metodo assai più semplice dell' Euleriano. Anzi di qui sempre più si corrobora che quando debbasi spinger la Serie rappresentante quel *termine intercalato* sino a qualsisia numero

venne cercare il valore del *termine* della Serie $1+1.2+1.2.3+1.2.3.4.+$ &c. corrispondente all' *Indice* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, &c. col dedurlo dal *termine* analogo dell' altra Serie $\frac{1}{2}+\frac{1.2}{3.4}+\frac{1.2.3}{4.5.6}+\frac{1.2.3.4}{5.6.7.8}+$ &c. [Vedasi Tom. V. c°. §§. 20. 21. a pag. 51.]. [Si legga ancora il seguente num. 11.].

(60) Lui stesso lo scrive nel §. 15. pag. 47. del Tomo suddetto *Sed initio ostendi hunc terminum esse æqualem radici quadratæ ex circulo, cujus diameter 1*, rimandando così al § 2. pag. 36. 37. Mi sembra però che nel giudicare del pregio dei due metodi non siasi sempre espresso egualmente. Ora dice [§. 2. pag. 36.], parlando del termine generale, *hoc autem hîc explicare non constitui, cum infra magis idonei modi occurrant ad idem efficiendum*. Ora parlando di quest' ultimo modo per le *Quadrature*, soggiunge [§. 15. pag. 47.] *Ex cujus cum hac comparatione forte nonnihil ad amplificationem analysis derivari poterit*. Là dice del primo metodo [§. 2. pag. 37.] *tamen ad interpolationem ejus seriei, seu ad terminos, quorum indices sunt numeri fracti, egregie accomodari potest*. Quà, dove espone il secondo [§. 15. pag. 47.], comparisce che nieghi il già detto = *Verumtamen ad terminos indicum fractorum inveniendos perquam est idonea, quippe qui adhuc ne operosissima quidem methodo definiri potuerunt* =.

(61) Principalmente si legga il §. 6. alla pag. 6.

mero n, ella diventi $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdots\cdots\frac{n-2}{n-1}\cdot 2\sqrt{n}$, e perciò all' *infinito* $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdots\cdots\frac{\infty-2}{\infty-1}\cdot 2\sqrt{\infty}$, ed anche meglio (se ∞ denoti il *limite* della Progressione *naturale* dei Numeri, che ne dà l' idea la meno oscura di tutte) $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdots\cdots\frac{2\cdot\infty-2}{2\cdot\infty-1}\cdot 2\sqrt{\infty}$, perfettamente d' accordo colle rigorose Formole di Mac-Laurin [62]. Adesso è impresa di poco momento quella di proseguire sulle medesime traccie e cogli istessi principj nella ricerca dei *termini* attenenti agli *indici* $\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$, &c. imperocchè partendo sempre dalla Serie fondamentale, che à servito a scuoprire il valore del *termine* per l' *indice* $-\frac{1}{2}$, si trovano facilmente eguali a $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\; 2\sqrt{A}$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot 2\sqrt{A}$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot 2\sqrt{A}$, &c. o sivvero $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\sqrt{C}$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{2}\cdot\sqrt{C}$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\sqrt{C}$, &c.; ed in generale per l' *indice* $\frac{n'}{2}$ viene il *termine* universalmente somministrato dalla Formola *canonica*

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdots\cdots n'}{2^{\frac{n'-1}{2}}}\cdot\sqrt{A} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdots\cdots n'}{\frac{n'+1}{2}}\cdot\sqrt{C}.$$

7. Ma

(62) Questo rispettabile Autore ha preso inganno scrivendo [*Traité des Fluxions* Tom. II. pag. 264.] che il *termine* della solita Serie 1, 1. 1, 1. 2, 1. 2. 3, 1 2. 3. 4 1. 2. 3. 4. 5, &c. corrispondente all'*indice* $\frac{1}{2}$, cioè intermedio tra i due primi 1, 1. 1 sia $\frac{\sqrt{c}}{2}$ posta [com'egli fa alle pag. 255. e 264.] la Sigla c rappresentante la Circonferenza circolare, di cui 1 significhi il Raggio, averebbe dovuto scrivere $\frac{\sqrt{\frac{c}{2}}}{2}$ o sivvero $\frac{\sqrt{\frac{c}{8}}}{2}$: altrimenti sarebbe falso quel che soggiunge *ce qui s'accorde avec ce qu'on au trouvé par d'autres Méthodes*. Cercherò di spiegare l'origine di questo equivoco nel §. II. al num. 19.

7. Ma non contento il grand' Euler di possedere il *termine generale* della sua Serie, e d' avere spianata la Strada onde giungere ad onta dei *fattori* innumerevoli, che lo compongono, al ritrovamento di grandezze note e *finite* non solo nei casi degli *indici* interi *positivi*, come in alcuni altresì degli *indici* frazionarj parimente *positivi*, immaginò di spogliarlo d' ogni ombra ed apparenza dell' Infinito [63] ricorrendo alle *Quadrature*. Fu allora ch' ei discoperse un' armonia non più vista tra l' Iperbola e il Circolo, fu qui dove spiccando un volo da pari suo fece conoscere soprattutto sino a quale alto segno peggiar potesse spiegando l' ali di quella mente penetrante e sublime, di cui lo fornì la Natura. Si propose perciò la ricerca della *forma* di un Integrale *trascendente*, il quale svanisse posta la variabile $x = 0$, e posta $= 1$ facesse nascere la sua Serie, e vale a dire si risolvesse come Funzione dell' *indice n* in ciascheduno dei *termini* della medesima Serie [64] Questa Teorìa affatto nuova in quel tempo (65), ch' egli tanto promosse dipoi, quanto apparisce dalle seguenti di lui *Memorie* inserite nell' istesso Tomo V. citato dei *Commentarj* di Pietroburgo (66), in altri Volumi dell' Accademia Imperiale medesima (67), nelle *Raccolte* delle Reali Accademie di Berlino (68), e Torino (69), non meno che nelle *Istituzioni* del suo Calcolo Integrale (70), non differisce dal metodo ultimamente imitato tra i nostri Italiani dal Sig. Gian-Francesco Malfatti nel Tomo IV. delle nuove *Mémoires &c.* dell' Accademia Tori-

nese

---

(63) Ancora gli Scrittori di *Elementi* trattano di queste apparenze d' *Infiniti* e di *Zeri* (Marie *Leçons &c.* a pag. 457. edizione di Parigi del 1778., Bezout *Cours &c.* Tom. IV. a pag 79 e segg).

(64) Nel citato Tomo V. di Pietroburgo si legga a pag. 39. il § 6. *Concipiatur pdx &c.*

(65) Intendo del $173\frac{0}{1}$. [Si veda la *Nota* (1)].

(66) *De summatione innumerabilium Progressionum* da pag. 91. a 106.

(67) *De productis &c.* (Nota (1)) nel Tomo XI.

(68) *Miscellanea Berolinensia ad incrementum Scientiarum, ex scriptis Societati Regiæ Scientiarum exhibitis edita &c.* Tomo VII. o Continuazione VI. pubblicata nel 1743 al num. III. *Ejusdem* L' Euler *de inventione integralium si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur* da pag. 129. a 147.

(69) Tomo III. *Mélanges &c.* [si consulti la *Nota* (48)] *Observationes circa integralia formularum* $\int x^{p-1} dx (1-x^n)^{\frac{q-1}{n}}$, *posito post integrationem* $x = 1$. E' per gli anni 1762—1765. stampato nel 1766.

(70) Lib I. Par. I. Sez. I. Cap. VIII. *De valoribus integralium, quos certis tantum casibus recipiunt* (Tom. I. a pag 230.), e Cap. IX. *De evolutione integralium per producta infinita* (Tom. I. a 255.).

nese (71) per conseguire la Somma di tutte le Serie *armoniche*. Ricavò adunque l' Euler che il *termine generale* poch'anzi da lui trovato, ed espresso per mezzo di un *numeratore e determinatore* infiniti, equivalesse alla Formola più compendiosa e senza Infiniti $Sdx(-Lx)^n$, fatto $x = 1$ dopo l'integrazione, ed è come dire $S \pm dx(Lx)^n$, o sivvero $\pm Sdx(Lx)^n$ nell' istessa supposizione. Quindi nasceva in virtù della generalità della Formola $Sdx(-Lx)^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{A} = \sqrt{C}$, $Sdx(-Lx)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{A} = \frac{\sqrt{C}}{2}$, $Sdx(-Lx)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{A} = \frac{3}{4}\sqrt{C}$, &c., quando $x = 1$; ed in questo appunto consiste quell' ammirabile corrispondenza annunziata sin da principio tra le suddette *Funzioni* logaritmiche o iperboliche, e le *Funzioni* eguali del Circolo, che in conseguenza dovremo confessare essere stata avanti di tutti prodotta al pubblico dall' incomparabile ingegno del Signor Euler (72).

8. Qualora l' Euler si fosse fidato di batter la Strada sempre pericolosa dell' *induzione*, sebbene alcuna volta da lui battuta, e da altri Analisti e Geometri (73), averebbe potuto abbreviar molto il cammino impostando la sua nuova ricerca sull' antica scoperta della *quadratura* degli Spazj asintotici delle Logaritmiche di vario gra-

(71) *Essai analytiques sur l'integration de deux formules differentielles & sur la somme générale des Séries harmoniques à termes rationels* da pag. 53. a 113. Articolo III. a 95. Il Tomo è per gli anni 1788. 89., stampato nel 1790., ed il Saggio è tra le *Mémoires présentés a' l'Académie*.

(72) Siffatta armonìa tra i Logaritmi e la Periferìa Circolare (specialmente in proposito dell' L2) venne molto promossa dall' istesso Matematico sommo tanto nel loco citato dalla *Nota* (68) delle *Miscellanee* di Berlino, quanto negli *Atti* dell'Accademia medesima per il 1761., ed in particolare alla pag. 95. della *Dissertazione* mentovata dall'altra *Nota* (48).

(73) Per non discostarmi molto dalla materia presente rispetto all' Euler accenno unicamente il loco citato degli *Atti* della R. Accademia di Berlino (*Nota* (48),) che à però il suo fondamento e principio nel num. IV. = *De Summis Serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum Dissertatio altera, in qua eædem summationes ex fonte maxime diverso derivantur* = dalla pag. 172. sino alla 193. del VII. Tomo, del quale parla la Nota (68). Wallis si servì quasi sempre dell' *induzione* (da lui chiamata con frase pochissimo matematica *satis demonstrativa*) per conseguire la Somma di molte Serie infinite. (Jacopo Bernoulli fu il primo a dimostrarle con tutto il rigore negli *Atti degli Eruditi di Lipsia* del 1686. (Tom. I. al num. XXIV. *Jacobi Bernoulli Opera* = *Genevæ* 1744). [Nota (118.)]. Tutta la *Centrobaryca* del Gesuita Paolo Guldino, che si può dire la Geometria l'σορροπικῶν, è uno sforzo di *analogia*, e perciò taluna volta ingannevole, come dopo di Vincenzo Riccati ò più ampiamente pruovato nelle mie *Ricerche* tuttora inedite *sopra dei Solidi Cocleari*.

grado (74). Imperocchè somministrando la Geometria con tutta facilità $Sdx(-Lx)^0 = 1$, $Sdx(-Lx)^1 = 1 . 1$, $Sdx(-Lx)^2 = 1 . 2$ secondo gli insegnamenti del Grandi (75) e generalmente del Lorenzini (76), poteva concludere secondo lo stile degli argumenti di *analogia* che se nei tre casi dell' *indice* $n = 0$, $= 1$, $= 2$ i *termini* della sua Serie venivano rappresentati da quelli Integrali, fatta sempre l' ipotesi di $x = 1$, l' istesso ancora dovesse universalmente accadere di qualunque altro *termine* della Serie corrispondente all' *indice* indeterminato n; di tal maniera che $Sdx(-Lx)^n$ fosse appunto la Formola, al cui conseguimento mirava. Ma ben lontano da profittare di pronostici di tal sorte, deboli troppo spesso e fallaci, ed anzi bramando d' investigare con un metodo diretto la *Funzione trascendente* rappresentatrice di tutti i *termini* della Serie, non volle nemmeno adattarsi al compenso di trovarla *a posteriori* con usare dell' invenzione di già pubblicata molti anni prima da Giovanni Bernoulli (77), ed appoggiata al canone semplicissimo dell' integrazione per parti, cioè $Sydx = yx - Sxdy$, nato per dir così insieme col Calcolo Differenziale (78). Difatto aveva il Bernoulli trovato esser sempre $Sdx(-Lx)^n = x\left((-Lx)^n + n(-Lx)^{n-1} + n . \overline{n-1}(-Lx)^{n-2} + n . \overline{n-1} . \overline{n-2}(-Lx)^{n-3} + n . \overline{n-1} . \overline{n-2} . \overline{n-3}(-Lx)^{n-4} + \&c.\right)$ [79]; Serie composta di un numero finito di *termini* ognivolta che l'*indice* o esponente $n = 0$ ovvero ad un numero qualunque intero *positivo*,

(74) Vedasi il §. III. al num. 31.

(75) *Geometrica Demonstratio Theorematum Hugenianorum &c.* edizione Fiorentina del 1701. cap. 1. num. 4. in fondo della pag. 3., = *De Infinitis infinitorum &c. Pisis* 1710. nello Scolio a pag. 67. 68. =.

(76) *Vitæ Italorum doctrina excellentium, qui sæculis XVII. & XVIII. floruerunt* = *Auctore Angelo Fabronio* = edizione Pisana del 1785. Tom. XI. alle pag. 333. 34.

(77) Loco citato nella *Nota* (14).

(78) E' l' istesso principio seguitato dal Cav. Newton nella sua Opera *de quadratura Curvarum*, i cui fondamenti aveva gettati sino del 1676. (*Opusculorum &c.* Tom. I. a pag. 335.). Dal principio medesimo ricavò poi il Bernoulli quelle bellissime Serie, che si leggono negli *Atti degli Eruditi di Lipsia* del Mese d'Agosto 1724., ed a pag. 582. e segg. del Volume II. della *Raccolta* delle sue Opere al num. CXXXII. = *Methodus commoda & naturalis reducendi Quadraturas transcendentes cujusvis gradus ad Longitudines Curvarum algebraicarum* =.

(79) Accennai nella *Nota* (14) l' epoca e luogo della Serie *ecumenica* del Bernoulli, la quale contiene come caso singolarissimo la presente, facendo $m = 0$, $e = n$, $Lx = -Lx$. (Si vedano tra gli altri *Traite du calcul Intégral par M. De Bougainville* Par. I. Cap. XX. num. CCXCI. pag 287. 88., *Institutionum Calculi Integralis Volumen I. Auctore L. Eulero* Cap. IV. Problema 19. num. 204. e segg. pag. 128. e segg. &c.).

sitivo, come nella Formola celebre del Binomio di Newton (80); Serie che posti gli *indici* 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c., e fatta la variabile $x = 1$, si convertiva nella proposta $1 + 1.1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4. + 1.2.3.4.5. + \&c. \ldots + 1.2.3.4.5. \ldots n$. Quindi è che in cambio di declinare dal diritto sentiero volle quell' Uomo sommo (81) anzichè cedere alla lusinga di una maggiore facilità per questo caso speciale, servirsi piuttosto della Formola Bernoulliana in conferma e ripruova del suo metodo generale e diretto, col quale aveva in animo di arricchire la Teoria delle Serie. Sapeva egli benissimo che fatto $x = 0$, sparivano dalla Serie del Bernoulli tutti i *termini* affetti dalle Potenze di $-Lx$, quantunque diventassero $0\Big((oo_{,})^{n} + n(oo_{,})^{n-1} + n.\overline{n-1}(oo_{,})^{n-2} + n.\overline{n-1}.\overline{n-2}(oo_{,})^{n-3} + n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}(oo_{,})^{n-4} + \&c.\Big)$, per essere quell' $oo_{,}$ l' *armonico*, o siccome altri dicono *paradosso*, assai diverso dall' *ordinario* ossia *antiperbolico* come $\frac{m}{r-r}$, che fu cagione d' una disputa amara tra il Padre Grandi ed il suo men valoroso antagonista Alessandro Marchetti nel principio di questo Secolo (82). Euler era troppo dotto per non conoscere che malgrado di quella mescolanza vaga d' *infiniti* e di *zeri* si annichilasse contuttociò la suddetta espressione, onde non venisse ad opporsi al fondamento da lui stabilito sin da principio = *Concipiatur* pdx *integratum talique constante auctum, ut facto* $x = 0$ *to-*

---

(80) Lo avverte lo stesso Bernoulli con queste precise parole *quoties e est numerus integer affirmativus Series abrumpitur* (loco citato §. XII. pag. 382.).

(81) Chiunque aspiri al rango di *gran Matematico* legga l' *Eloge de M. Leonard Euler = par M. Nic. Fuss = S.t Petersbourg* 1783. =, e poi misuri le proprie forze. Matematici sono molti; gran-Matematici son sempre pochi. [*Nota* (17)]. Ma per ben misurarsi conviene di possedere in alto grado le Matematiche: altrimenti si corre il pericolo di falsi giudizj, come avvenne al Conte Lorenzo Magalotti, cui piacendo di encomiare senza misura il suo amico Vincenzio Viviani, lo chiamò il *Gran Geometra Fiorentino* in veduta principalmente d'una Proposizione ammirabile secondo lui, sebbene questa non fosse altro in sostanza che un Teorema di Apollonio esposto con delle diverse parole. (*Lettere Familiari del C. Lorenzo Magalotti &c.* edite in Venezia l'anno 1741. a pag. 41.).

(82) *Dialoghi del P. M. Grandi Camaldolese &c. circa la controversia eccitatagli contro dal Sig. Dottore Alessandro Marchetti* = Lucca 1713. = Oltre di ciò si consulti la *Nota* seguente (276). Il medesimo Abate Grandi può dirsi con molta ragione fondatore dell' *Infinito subparadosso* colla Proposizione X. del suo Libro *De Infinitis Infinitorum &c.* a pag. 63. espressa così *Spatium infinitum, idemque infinities minus Asymptotico spatio Apollinianæ Hyperbolæ reperire*. Anche Jacopo Bernoulli fù dei primi a notare degli Infiniti d' ordine inferiore tra il Logaritmico, e l' *ordinario*. (Loco citato dalla *Nota* (158) a pag. 254.).

totum integrale evanescat =, e più sotto = *Constantis additione opus non est*, *cum facto* $x=0$ *omnia evanescant* = (83). Imperocchè dalle sue speculazioni non molto posteriori (84) si comprende abbastanza quanto egli fosse in possesso di tutte le proprietà dell'Infinito *armonico* (illustrate modernamente dal Padre Gregorio Fontana) (85), e massime di quella che nè questo *Infinito*, nè niuna *potenza* di lui ∞^n (posto l'esponente n assegnabile) abbiano mai l'efficacia moltiplicando lo *zero* di produrre una grandezza *finita*. Anzi gioverà quì, in aggiunta di ciò che n'ò detto nella mia Opera *Magnitudinum exponentialium &c.* (86) e nell'altra = *Exercitatio mathematica &c.* = (87), osservar di passaggio come quelli Integrali particolari assegnati in virtù della Formola generale del Bernoulli si confermino mirabilmente usando delle Serie infinite. Per esempio $Sdx(\pm Lx)$, quando si faccia $x=1+z$, diventa $Sdz\left(\pm L(1+z)\right) = Sdz$ $\left(\pm\left(\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^6}{6}+\frac{z^7}{7}-\&c.\right)\right) = \pm\left(\frac{z^2}{1.2}-\frac{z^3}{2.3}+\frac{z^4}{3.4}\right.$ $\left.-\frac{z^5}{4.5}+\frac{z^6}{5.6}-\frac{z^7}{6.7}+\frac{z^8}{7.8}-\&c.\right)+C$. replicata perciò l'istessa supposizione che l'Integrale debba esser nullo quando $x=0$ ossia $z=-1$, viene a determinarsi la *Costante* $C=\pm\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}\right.$ $\left.+\frac{1}{6.7}+\frac{1}{7.8}+\&c.\right)=\pm\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right.$ $\left.-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\&c.\right)=\pm 1$; laonde il valore dell'Integrale quando $x=1$ cioè $z=0$, risulta come sopra ± 1, senza intervento però dell'Infinito *armonico*; e presso a poco si sperimenterebbe l'istesso in proposito di $Sdx(\pm Lx)^2$, $Sdx(\pm Lx)^3$, &c. Mediante l'ajuto di altre Serie infinite sommamente eleganti, dedotte dalle *potenze* del premesso Infinitinomio.

D ij 9. Ab-

(83) Paragrafo 6. c°. nella *Nota* (64), e §. 14. a pag. 46. del Tomo V. di Pietroburgo.

(84) *Miscell. Berolin.* Par. I. della Continuazione VI. o sia Tomo VII. a pag. 149. pubblicato nel 1743. *De inventione integralium &c.* [Si veda la Nota (68)].

(85) *Disquisitio XIII. De Infinito Logarithmico* tra l'altre del Volume stampato in Pavia l'anno 1780. da pag. 303. a 323.

(86) Principalmente ai Capitoli II. (§. 73.), III. (§§. 109. 110. 111. 114.), IV. (§§. 128 129), X. in tutti i Paragrafi.

(87) Alla Sezione III. §. 49. ed altrove.

9. Abbandonato dunque dall'Euler questo metodo inverso (88), si pose a cercare tra le innumerevoli Formole Integrali quella che gli somministrasse nelle condizioni supposte il *termine generale* della sua Serie (89). Primieramente considerò $Sx^e dx(1-x)^n$, e vide che annullandosi quando $x=0$, prendeva nel caso di $x=1$ per gli *indici* 0, 1, 2, 3, 4, &c. la *forma* di $\frac{1}{e+1}$, $\frac{1.1}{(e+1)(e+2)}$, ... $\frac{1.2}{(e+1)(e+2)(e+3)}$, $\frac{1.2.3}{(e+1)(e+2)(e+3)(e+4)}$, $\frac{1.2.3.4}{(e+1)(e+2)(e+3)(e+4)(e+5)}$, &c., ed universalmente per l'indice n intero e *positivo* .... $\frac{1.2.3.4 \ldots n}{(e+1)(e+2)(e+3)(e+4)(e+5) \ldots (e+(n+1))}$ Ma non gli parve bastevole ad ottenere il suo intento (90), quantunque siccome anderò mostrando in questo, e nel II. §., si derivi immediatamente dalla medesima il *termine generale* cercato. Non intendo in qual modo, nè per qual motivo dovendo egli adoprare nella sua ricerca, come difatto adoprò, l'Infinito, credesse che l'*indice* intero e positivo e non fosse idoneo a poter mai rappresentar quella Serie, ma convenisse di ricavarla da $Sx^{\frac{f}{g}} dx(1-x)^n$ coll'*indice* $\frac{f}{g}$ frazionario. Dalle parole dell'Euler (91) = *Ut igitur progressiones transcendentes adipiscamur ponatur* e *æquali fractioni* $\frac{f}{g}$...., *ubi si fractio* $\frac{f}{g}$ *non fuerit numero integro æqualis*, *seu si* f *ad* g *non habuerit rationem multiplicem*, *progressio erit transcendens*, & *termini intermedii a quadraturis pendebunt* = apparisce d'aver egli pensato non essere *trascendenti* le Serie, che avessero $Sx^e dx(1-x)^n$ per loro *termine generale*. E di-

(88) E' vero che nel §. 11. a pag. 44. del c.° T. V. di Pietroburgo asserì che $r.r-1.r-2 \ldots 1 = Sdx(-Lx)^r$, posto al solito $x=1$, rimandando al §. 14. pag. 46. Ma quì non fà altro che dare in conferma per il solo caso di $r=3$ il valore di $Sdx(-Lx)^3$ ricavato dalla Formola del Bernoulli $-x(Lx)^3+3x(Lx)^2-6x(Lx)+6x=3.2.1=6$. Non è il suo metodo (torno a dire), ma una riprova della verità del suo metodo per i soli *indici* intieri e *positivi*. E questa riprova è vera riprova, perchè consiste nel paragone dei risultati di due diversissimi metodi.

(89) *Assumsi igitur &c.* §. 7. a pag. 39. e 40., e soprattutto §. 8. a pag. 40. e §. 9. a 41. del Tom. V. &c.

(90) Del Tomo V. ai §§. 10. 12. 13. 14., alle pag. 42. 45. e 46.

(91) Al §. 10. e pag. 42. del Tom. V.

E difatto poco sopra esso si esprime così. = *Hîc observandum est progressionem semper fieri alqebraicam, quando loco e assumatur numerus affirmativus* =(92). Ma se a forma della sua stessa definizione (93) è sempre *trascendente* la Serie ogni volta che i *termini* posti di mezzo a quelli degli *indici* interi e *positivi* dipendano dalle *Quadrature*, ognun vede esser ciò tanto vero di $Sx^e dx (1-x)^n$, quanto di $Sx^{\frac{f}{g}} dx (1-x)^n$. Ne dà un esempio il medesimo Euler: imperocchè dopo d'avere adoprato l'*esponente* $\frac{f}{g}$, e dedotta per gli *indici* 1, 2, 3, 4, ... n la Serie $\frac{1}{f+g}$, $\frac{1.2}{(f+g)(f+2g)}$, $\frac{1.2.3}{(f+g)(f+2g)(f+3g)}$, $\frac{1.2.3.4}{(f+g)(f+2g)(f+3g)(f+4g)}$, $\frac{1.2.3.4....n}{(f+g)(f+2g)(f+3g)(f+4g).....(f+ng)}$, e fatto $f=1$, $g=0$ a fine di conseguire la Serie propostasi 1, 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4 ....., 1.2.3.4 .....n, ottenne per *termine generale* di questa (che pure è *trascendente* atteso i *termini* intermedj non algebricamente esprimibili) la Funzione $\frac{1}{0^{n+1}} Sx^{\frac{1}{0}} dx (1-x)^n = \infty^{n+1} Sx^{\infty} dx (1-x)^n$, dove senza curarsi del *coefficiente* costante, che non cambia mai la natura della Funzione, $e=\infty$ spetta alla classe degli *esponenti* interi e *positivi* come ultimo loro limite e compimento.

10. All' effetto di liberarsi degli Infiniti, che ingombravano il *termine generale* (94), fa la sostituzione di $x^{\frac{0}{1+0}} = x^{\frac{0}{1}}$, ed ottiene la nuova *forma* di esso $Sdx \frac{(1-x^0)^n}{0^n}$; e per togliere ancora quì tutto ciò che non sia grandezza finita, ricorre alla regola data da Giovanni

(92) Paragrafo 9. a pag. 41.

(93) Nell' istesso Tomo V. egli dice (§.4. pag. 38.) *Progressiones vero quæ tales requirunt terminos generales, qui algebraice dari nequeunt, voco transcendentes, quemadmodum Geometræ omne id, quod vires communis Algebræ superat, transcendens appellare solent.* E nel §. 6. a pag. 39. *Integrale dicto modo determinatum erit proprie terminus generalis. Si quidem id haberi potest, non opus est formula differentiali, sed progressio inde formata habebit terminum generalem algebraicum; secus res se habet si integratio non succedit, nisi certis numeris loco* n *substitutis.* [Si veda l'*esempio* che siegue al §. 12. pag. 45.].

(94) Loco citato *Qui vero hujus expressionis sit valor, sequenti modo investigo.* (Leggasi il §. 13. a pag. 45.).

vanni Bernoulli (95), coll' ajuto della quale conseguisce finalmente $Sdx(-Lx)^n$ per espressione del *termine generale* (96). Tre riflessioni mi occorrono sopra di questo procedere tenuto dall' Euler. In primo luogo senza punto cambiare la primitiva *forma* $oo^{n+1}Sx^{oo}dx(1-x)^n$ proverò anzi nel II. §. com' ella sia la vera e più naturale per discuoprire tutti i *termini* della Serie lochè semplificherà non poco la ricerca presente. In oltre poteva l'Euler senza del Calcolo Differenziale ricavar subito (rammentandosi che $x^o = 1 + o Lx$ in virtù delle Formole esponenziali) da $Sdx\left(\frac{1-x^o}{o}\right)^n$ l' equivalente ..... $Sdx\left(\frac{1-1-o\,Lx}{o}\right)^n = Sdx(-Lx)^n$. O piuttosto essendo di già notissimo, secondo ciò che scoperse sino del 1695. Edmondo Halley (97), che $\frac{x^o-1}{o} = Lx$, nasceva l'istessa Funzione $Sdx(-Lx)^n$ indipendentemente dall' uso della Regola Bernoulliana. Di questa Equazione Halleyana, illustrata molto, e promossa dal medesimo Euler (98), e quindi dal Cav. Daviet De Foncenex (99), ed ultimamente da M. De La Grange (100) che la trovò combinare colla pratica d' *interpolazione* usata più in antico da Briggs nel costruire le sue nuove *Tavole* dei Logaritmi, mi servirò nel §. III. per assegnare gl' istessi Integrali in una maniera diversa da tutte l'altre sino ad ora adoprate (101). Finalmente avendo l'Euler in mira di rintracciare una Funzione logaritmica, poteva immantinente ottenerla nel modo seguente $\infty^{n+1}\ Sx^\infty dx\,(1-x)^n = Sx^\infty.\ \infty\ dx\left(\frac{1-x^{\infty.o}}{o}\right)^n = Sd\,(x^\infty)$

(—L

(95) *Per regulam igitur cognitam quæramus &c.* (§. 13. pp. 45. e 46. loco citato). Si consulti la *Nota* (40).

(96) Nel seg. §. 14. a pag. 46. Parimente nel § 5. a pag. 5. e 6. del Tom. XI.

(97) Volume XIX. delle *Philosophical Transactions* al num. 216. *A most compendious and facile methode for constructing the Logarithms: &c. without any regard to the Hyperbola &c.*

(98) Capo VII. del Tomo I. stampato nel 1748. dell' Opera celebre *Introductio in Analy in Infinitorum*, e più amplamente tra le *Memorie* della R. Accademia di Berlino del 1749. pubblicate nel 1751. quella così intitolata (pag. 139) *De la controverse entre Mrs. Leibnitz & Bernoulli sur les Logarithmes des nombres negatifs & imaginaires* (sino alla pag. 180.).

(99) *Reflexions sur les quantités imaginaires* nel Tom. I. edito del 1759. *Miscellanea philosophico-mathematica Societatis privatæ Taurinensis = Augustæ Taurinorum =.*

(100) Ai §§. 20 21. (pag. 288. 289.) della *Dissertazione* citata nella *Nota* (7), non meno che tra le *Mémoires* dell' Accademia di Berlino per l'anno 1776. *Sur l'usage des Fractions continues dans le Calcul Intégral* ai §§. 10. e 12. pp. 249.250. e 252.

(101) Vedasi il num. 30.

$\left(-L(x^{00})\right)$ per essere $00 = \frac{1}{0}$, ed $00 - 1 = 00$. Operando così questo rispettabile Autore avrebbe non solamente veduto che coll'unica Formola universale, poco fà spiegata, soddisfaceva a tutti i casi tanto degli *indici* interi *positivi*, quanto dei *frazionarj* parimente *positivi*, e perfino degli *indici negativi* secondo che manifesterò nel §. III. [102], ma di più che quella Formola primitiva, senza di nessun cambiamento, nel medesimo tempo che spiegava come per gli *indici* interi, fatta la solita ipotesi di $x=1$, somministrasse per *termini* della Serie quelli istessi, che risultavano dall' Integrale Logaritmo del Bernoulli esposti nel Num. 8. (poichè $Sdx\,(-Lx)^n$ conduce sempre a risultato eguale a quello di $Sd(\varphi x)(-L(\varphi x))^n$ mentre $x=1$ ogni volta che φx come x diventi o posto $x=0$, ed $=1$ posto $x=1$, lo che segue di x^{∞}) (103) fosse idonea altresì a far conoscere i *termini* corrispondenti agli *indici* $\frac{n'}{2}$ che comprendevano delle Funzioni di Circolo, sebbene espressi da una Formola logaritmica.

11. Euler difatto arrivato a possedere la Formola $Sdx\,(-Lx)^n$ con un metodo assai laborioso, di cui non parve molto contento egli stesso (104), non potè nemmeno condursi a trovare direttamente i valori di $Sdx(-Lx)^{\frac{1}{2}}$, $Sdx(-Lx)^{\frac{3}{2}}$, $Sdx(-Lx)^{\frac{5}{2}}$ &c., ma gli convenne in una maniera indiretta ottenergli per mezzo d'un'altra Serie, quale fu quella $\frac{1}{2} + \frac{1.2}{3.4} + \frac{1.2.3}{4.5.6} + \frac{1.2.3.4}{5.6.7.8} + \ldots\ldots + \frac{1.2.}{(n+1)}$

---

(102) Numeri 28. e 29. Per adesso dalla parte degl'*indici* negativi non è stato rinvenuto che quello corrispondente $a^{-\frac{1}{2}}$. (Num. 6. e 14.).

(103) Di quì si scorge quanto estesissima potrebbe essere la soluzione di quel Problema Analitico risoluto nel *Proemio*. Imperocchè in vece di $\varphi x = L\left(\frac{1}{x}\right)$ colle medesime condizioni espresse di sopra potrebbesi sostituire $\varphi x = L\left(\frac{1}{\Delta x}\right) = -L(\Delta x)$ surrogando ancora a dx il differenziale $d\Delta x$. Si riscontri l'Euler nel §. 13. *Ex conditione, qua hujusmodi termini generales usui accomodari debent, facilè intelligitur loco* x *alias functiones ipsius* x *posse subrogari, dummodo eæ tales fuerint, ut sint* $=0$ *si* $x=0$ *&* $=1$ *si* $x=1$ *&c.* alla pag. 45. del Tomo V.

(104) Loco citato § 15. a pag. 47. *Verum quidem est hanc methodum terminorum istius Seriei inveniendorum esse operosissimam &c.* [Nota (59)]. E di nuovo nel Tom. XI. a pag. 6. *Quanquam enim si* n *sit numerus fractus, non ita facilè constat, qualem quadraturam* $Sdx(-Lx)^n$ *contineat &c.*

$\frac{3.\ 4.\ \ldots\ .\ n}{(n+2)\ \ldots\ 2n}$, di dove concluse (105) che $Sdx(-Lx)^{\frac{n'}{2}}$ fosse eguale

a $\sqrt{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ldots(n'+1)Sdx(x-xx)^{\frac{n'}{2}}}$, e poi più generalmente (106) trovò

$$Sdx\ (-Lx)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\frac{1.\ 2.\ 3.\ldots p\left(\frac{2p}{q}+1\right)\left(\frac{3p}{q}+1\right)\left(\frac{4p}{q}+1\right)\ldots\left(\frac{qp}{q}+1\right)Sdx(x-xx)^{\frac{p}{q}}Sdx(x^2-x^3)^{\frac{p}{q}}Sdx(x^3-x^4)^{\frac{p}{q}}Sdx(x^4-x^5)^{\frac{p}{q}}\ldots}{Sdx(x^{q-1}-x^q)^{\frac{p}{q}}}}$$

che soddisfaceva ad *intercalare* qualunque *termine* della Serie proposta mediante le *quadrature*, purchè appartenesse ad un *indice razionale* e *positivo* (107). All'oppoſto mentre avesse prescelta la Formola $Sd(x^{oo})(-L(x^{oo}))^n$, identica alla sua primitiva oo^{n+1} $Sx^{\infty}dx(1-x)^n$, veniva non solo ad attingere da quest' unico fonte i *termini* della sua Serie per gli *indici positivi* ed intieri, ma a confermargli, se pur voleva, colla nota Serie del Bernoulli: poichè $Sd(x^{oo})$ $(-L(x^{oo}))^n = x^{oo}((-L(x^{oo}))^n + n(-L(x^{oo}))^{n-1} + n\ .\ \overline{n-1}\ (-L(x^{oo}))^{n-2}$ $+ n\ .\ \overline{n-1}\ .\ \overline{n-2}\ (-(Lx^{oo}))^{n-3} + n\ .\ \overline{n-1}\ .\ \overline{n-2}\ .\ \overline{n-3}(-L(x^{\infty}))^{n-4} + \&c.)$, e perciò $=o$ se $x=o$, e posto $x=1$, si converte in $1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ .\ n$ come l'altra del Num. 8. Di più senza la sostituzione usata da lui, e senza ricorrere ad altra Serie veniva a ricavare direttamente dalla sua Formola primitiva e fondamentale $oo^{n+1}Sx^{\infty}\ dx\ (1-x)^n$ tutti i *termini* che appartenevano agli indici *positivi* $\frac{n'}{2}$ ed erano dipendenti

(105) Leggasi tutto il processo analitico dei §§. 19. 20. e 21. e parte del 22. alle pag. 50. 51. e 52. del Tom. V. summentovato.

(106) Ai §§. 22. e 23. pp. 52. e 53. del suddetto Volume V. e massime dove stà scritto *Hinc generaliter &c.*, non meno che al §. 5. pag. 6. del Volume XI. degli antichi di Pietroburgo .... *tamen eodem loco ostendi posito* $\frac{p}{q}$ *loco* n *formulam* $Sdx(-Lx)^{\frac{p}{q}}$ *congruere &c.*

(107) Nel Tom. V. ed XI. precitati Euler considerò sempre l'*indice n positivo*. Nei casi poi degli *indici irrazionali* e *transcendenti* ognun vede che quelle Formule si perdono nell' Infinito.

denti dalla *quadratura* del Circolo, non meno che quelli attenenti agli *indici* frazionarj $\frac{p}{q}$ parimente *positivi*, che rimandavano ad altre *quadrature* di Curve. Tutto allora veniva facile, naturale, diretto, e connesso con un solo principio, il quale l' avrebbe in oltre condotto ad assegnare i *termini* della sua Serie dalla parte degli *indici negativi*, che non potè contemplare per l' inefficacia delle sue Formole. Ed infatti quel *termine* della sua Serie, che corrisponde all' *indice* $-\frac{1}{2}$, di cui ò parlato sin dal principio del Num. 6., egli lo rintracciò mediante il *termine generale* espresso per infiniti *fattori* (108), nè potè mai conseguirlo dalla Formola $\sqrt{1.2.3.4 \ldots\ldots (n'+1)\, Sdx(x-xx)^{\frac{n'}{2}}}$ la quale in quel caso diventando $\sqrt{(-1+1)\, Sdx(x-xx)^{-\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots}$ $= 0 . \sqrt{\int \frac{dx}{\sqrt{x-xx}}}$ era ben lontana da rappresentare, mentre x sia $=1$ diametro d' un Cerchio, la Funzione $\sqrt{C}$, al quale effetto converrebbe che fosse, come ognun sa, $\sqrt{2}\sqrt{\int \frac{dx}{\sqrt{x-xx}}}$. Tutto ciò sarà dimostrato nel II. §. ma intanto non deve far maraviglia se ai primi inventori in materia di scienze (che fuori di dubbio son uomini grandi) non sempre gli si affacci alla mente tutta intiera la fecondità ed estensione dei loro principj, d' onde avvenga che nella catena interminabile del sapere molti anelli vi siano ancor di presente così lontani uno dall' altro, che sarebbe di sommo profitto o rapprossimarli o riunirli.

12. Passando adesso a parlare d' Euler il giovane, egli incomincia da dire (109) che niuno Analista avanti di lui aveva trovato *a priori* il valore dell' Integrale $Sdx(-Lx)^{-\frac{1}{2}}$ nemmeno per l'unico caso di $x=1$. S' io non vado lungi dal vero, a me pare per il contrario che molto prima del Figlio avesse il Padre scoperto e comunicato il valore di quell' Integrale $=\sqrt{C}$, e che fosse arrivato a conoscerlo col mezzo di un metodo altrettanto diretto ed *a priori*,

quan-

(108) *Nota* (102). Difatto nel Tom. XVII. dell'Accademia di Berlino non diede nessun metodo nuovo a questo proposito, ma rimandò ai due citati di Pietroburgo *Or j' ai démontré autrefois &c.* (§. 14. a pag. 98.).

(109) *Et c'est là cette formule même de la quelle j' ai fait mention au commencement, & dont personne n'a encore donné l' intégration* a priori, *quoiqu'on la cherche seulement pour le cas* z (ovvero x) $=1$. Alla pag. 254. del Tom. XVI. di Berlino.

quanto è indiretto ed a *posteriori* il modo adoprato dal Figlio. Fù il Padre difatto, che espose in due differenti maniere il *termine generale* della Serie 1+1.1+1.2+1.2.3+1.2.3.4+.....+1.2.3.4....n, cioè mediante una Formola aritmetica composta d' infiniti *fattori*, e mediante la Funzione integrale $Sdx(-Lx)^n$, equivalente per il caso di $x=1$ in qualunque supposizione del valore dell' *indice* n alla prima. La prima *forma* del *termine generale* ò provato nel Num. 2. ch' ell' era così naturale e diretta da non poter mai desiderarla nè più semplice nè più rigorosa. L' altra *forma* trovata parimente dal vecchio Euler fece tosto conoscere che quell' istesso valore $\sqrt{c}$, cui conduceva la prima nel caso di $n=-\frac{1}{2}$, fosse ancora rappresentato da $Sdx(-Lx)^{-\frac{1}{2}}$ come da Formola equipollente. Il Padre adunque avanti del Figlio aveva assegnato in un modo quasi intuitivo (e vale a dire più perfetto di tutti) il *termine generale* della Serie proposta; l' aveva assegnato di due *forme* diverse; e nominatamente sino del M. DCC. XLIX. aveva assegnata l' Equazione $Sdx(-Lx)^{-\frac{1}{2}}$ $=\sqrt{c}$ (110), che si deduceva immediatamente dalla perpetua corririspondenza delle due *forme*, e costituiva il caso più facile e pronto del suo *termine generale* (111).

13. Posto ciò al solo effetto di stabilire la vera epoca della Scoperta, andiamo più oltre ad esaminare il metodo tenuto dal Figlio. Esso si appoggia [112] a quell' istessa Equazione $Sdx(-Lx)^n$ $=1.2.3.4.....n$ (quando $x=1$, ed $n=$ ad un numero intero *positivo*) conosciuta egualmente ed usata dal vecchio Euler dopo di Giovanni Bernoulli, siccome ò detto nel Num. 8. Fissa quindi due *leggi* potissime della Serie (113), e sono; 1. che ogni *termine* della medesima [da lui con tutta ragione chiamata *hypergéométrique* (114)], il cui *indice* oltrepassi di un' *unità* quello del *termine* antecedente, sia eguale al prodotto di quest' ultimo *termine* moltiplicato per l' *indice* nuovo; 2. che allora quando la Serie si avanzi sino all' *indice* $n=\infty$, i *termini* consecutivi attenenti agli *indici* n, $n+1$,

$n+2$,

(110) Sia riletta la Nota (56).

(111) Difatto Euler il Padre fù il primo a rappresentare il *termine generale* di quella Serie in due modi, cioè come si vede esposto nel num. 1., e per mezzo di $Sdx(-Lx)^n$.

(112) Tom. XVI. cit. dell'Accademia R. di Berlino alle pag. 255. e 256.

(113) *Donc par la nature de la Série hypergéométrique &c.* a pag. 257. del Tomo citato. Quindi alla pag. 258. *Mais, si* n *est un nombre infini, il est manifeste par le caractere de la Série &c.*

(114) Alle pag. 256. e 257. Ancora Euler il Padre l' aveva nominata così sino del 1749. (§. 14. a pag. 98. Tom. XVII.) *en examinant la progression hypergéométrique* 1, 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4, &c.

$n+2$, o sivvero agli *indici* n, $n+\frac{1}{2}$, $n+1$ debbano essere in Proporzione *continua* geometrica (115). La prima di queste due *leggi* è intuitivamente l' *indice* n sia intero e *positivo*, perocchè nasce dalla sola osservazione oculare della Serie proposta $1+1 . 1+1 . 2+1.2.3+1.2.3.4+ \ldots +1.2.3.4 \ldots n$. E quanto agli *indici* frazionarj *positivi*, rappresentati universalmente da $\frac{n'}{2}$, vien dimostrata con pari evidenza dai *termini* noti $\frac{1}{2}\sqrt{c}$, $\frac{1.3}{2.2}\sqrt{c}$, $\frac{1.3.5}{2.2.2}\sqrt{c}$, $\frac{1.3.5.7}{2.2.2.2}$ .... $\sqrt{c}$, $\frac{1.3.5.7.9}{2.2.2.2.2}\sqrt{c}$, &c. ricavati agevolissimamente, come ò fatto nel Num. 6., dal *termine generale* del Padre. Anzi l' istessa *legge* si vedrebbe non diversamente verificata per altri *indici* $\frac{p}{q}$ colla guida sempre sicura di quel *termine generale* Euleriano. In proposito della seconda, ella è letteralmente annunziata tra le scoperte del Padre, nè solo per la Serie proposta, ma per l'altra ancora assai più generale $(f+g)+(f+g)(f+2g)+(f+g)(f+2g)(f+3g)+(f+g)(f+2g)(f+3g)(f+4g)+$ &c. a tenore del Num. 6. Di più è da sapersi che il vecchio Euler aveva perfino adattata l' istessa *legge* agli *indici* .... $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$ &c. nel considerare l' ultima Serie ecumenica (116).

14. Colla traccia d' ambedue le *leggi* accennate il giovane Euler si fà strada a rinvenire il valore del *termine* della Serie [ch' egli nomina x'] corrispondente all' indice $-\frac{1}{2}$ coll'uso dell' *interpolazione*, e vale a dire per mezzo di un metodo giudicato da tutti i Matematici indiretto e precario, e solamente lodevole ogni volta che l'Algebra non somministri il metodo vero e diretto, qual'è quello di assegnare il *termine generale*. Sono perciò di avviso che avendo il Padre di già scoperto questo *termine generale*, che dava il *termine* ricercato per tutti gli *indici positivi*, ed anche per $-\frac{1}{2}$, non vi fosse il prezzo dell' opera d' *interpolare* sussidiariamente la Serie

E ij all'

(115) *Les termes qui répondent aux indices n, $n+1$, $n+2$ &c. suivront une progression géométrique. C'est pourquoi le terme qui répond à l'indice $n+\frac{1}{2}$ sera moyen proportionnel entre les termes qui répondent aux indices n & $n+1$. Ainsi &c.* (pag. 258. del Tom. XVI. precitato).

(116) Tomo XI. cit. dell'Accademia di S.t Petersbourg a pag. 6. §. 6. *si nunc in Serie assumta terminus, cujus index est $\frac{1}{2}$, ponatur z &c.*

all'effetto di conseguire il medesimo intento. Sembrami adunque che nell' intraprendere il suo lavoro sia caduto il Figlio in due equivoci, e sono che mancasse il metodo diretto o *a priori* per siffatta ricerca, e che fosse *a priori* per il metodo *a posteriori* dell' *interpolazione* ch' egli à adoperata (117). Segue difatto l' istesso stile, col quale Wallis nella Proposizione CLXXXXI. della sua *Aritmetica degli Infiniti* (118), e dopo di lui il Visconte Barone Guglielmo Brouncker (119) trovarono per mezzo d' infiniti *fattori* o *divisori* il *termine* $\square$ della Serie $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3\cdot5}{2.4}, \frac{3\cdot5\cdot7}{2\ 4.6}, \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{2.4.6\ 8}$, &c. frapposto tra i due primi *termini* $\frac{1}{1}$ e $\frac{3}{2}$, di cui accennerò un mio pensiere nel Num. 23. del §. III. Anzi dovrei dire piuttosto che ancora sù di questa *interpolazione* sia stato il Figlio prevenuto dal Padre, come si può riscontrare nel c.° Tomo XI. dell'Accademia di Pietroburgo (120) dove presso a poco nel medesimo modo e sul fondamento delle medesime *leggi* si assegna mediante la *radice quadrata* d' una Serie composta d' infiniti *fattori* il valore del termine z, che corrisponde all' *indice* $\frac{1}{2}$ della Serie più generale notata appiè del

(117) *Nota* (109). Tom. XVI. cit. alla pag. 257. *Ainsi notre valeur desirée n'est autre chose que le terme qui dans la même progression répond à l'indice* — $\frac{1}{2}$. *D'où s'ensuit que tout à présent se réduit à ce que nous nous efforcions de dégager ce terme par l'interpolation.*

(118) Vale a dire alla pag. 468. e 469. del Tomo I. della *Raccolta* delle sue Opere pubblicato in Oxford nel 1695. Egli si appoggia principalmente alle Proposizioni 118. e 121. che sono alle pag. 415. 416 e 417., e quindi ai due Scolj della Proposizione 165. (a pag. 439.) e della 168. (a pag. 441.), non meno che alla *Tavola* della Proposizione CLXXXIX.

(119) Tomo I. poc'anzi citato *Johannis Wallis S. T. D. Geometriæ Professoris Saviliani in celeberrima Academia Oxoniensi Opera Mathematica &c.* da pag. 469. (*Idem aliter &c.*) sino a 476. Si consulti eziandio la *Nota* (48), poichè nel luogo ivi citato Leonardo Euler scrisse così (§. 18. a pag. 41). *Quantum quidem ex Vallisii recensione constat, Brounckerus ad istam formam deductus est per interpolationem hujus Seriei* $\frac{1}{2} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6} +$ &c., *cujus terminos intermedios ipsam Circuli quadraturam præbere Wallisius demonstraverat.* E' però vero che la Serie di Wallis non è la quì esposta. (Vedasi il num. 23.).

(120) Al §. 6. e pag. 6. 7. e specialmente poco sopra e poco sotto di questo passo *hi termini interpolati evadent tandem medii proportionales inter contiguos Seriei terminos. Quare si singuli termini interpolati jam ab initio tanquam medii proportionales spectentur, sequentes prodibunt approximationes ad terminum* z, *cujus index* $\frac{1}{2}$. Quanto questa interpolazione era facile, altrettanto era difficile, l'altra indicata nella *Nota* precedente, dimodochè l'istesso Euler cambiasse poi di parere. (*Nova Acta Academiæ Petropolitanæ* Tom. II. a pag. 43. (Diporto Analitico).

del numero precedente. Il confronto è facile a farsi nel modo seguente (121), ponendo $f=0$, $g=1$.

Padre.		Figlio.	
Indici $\frac{1}{2}$	Termini z	Indici $\frac{1}{2}$	Termini x'
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}\,z$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}.\,x'$
$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\,z$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\,x'$
$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}.\,z$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\,x'$
		$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}.\,x'$
&c.	&c.	&c.	&c.

Intanto si vede che salve sempre le medesime *leggi* sia $z=\frac{1}{2}x'$. Ed in virtù della Progressione geometrica accertata dall'uno e dall' altro rispetto agli ultimi *termini* della Serie, come ò avvisato nel Num. 13., il primo trovò $zz=\frac{2.\,4.\,4.\,6.\,6.\,8.\,8.\,10.\,10\ldots\ldots 2n\ \ 2n\ .\ (2n+2)}{3.\,3.\,5.\,5.\,7.\,7.\,9.\,9.\,11\ldots\ldots(2n-1)(2n+1)(2n+1)}$, ed il secondo $x'x'$ (cioè $4zz$)$=\frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10\ldots\ldots 2n\ .\ 2n\ .\ 2\ (2n+2)}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11\ldots\ldots(2n-1)(2n+1)(2n+1)}$, espressioni *identiche* tra di loro (122).

15. Concludo da tutto questo che o per non aver lette il giovane Euler le *Dissertazioni* anteriori del Padre o per non essersele rammentate (123) abbia potuto supporre che mancasse la maniera bre-

(121) Tomo XI. citato al §. 6. pag. 6., e Tom. XVI. di Berlino nella *Tavoletta* ch' è a pag. 257.

(122) E' per errore di Stampa che in fondo della pag. 259. del Tomo XVI. di Berlino si legge $\int\frac{dz}{\sqrt{-Lz}}=\sqrt{x}$ in vece di $\int\frac{dz}{\sqrt{-Lz}}=x$. Così nel Tom. XI. di Pietroburgo (§. 7. pag. 7.) $Sdx(-Lx)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{\Pi}{2}}$ in cambio di $\frac{\sqrt{\Pi}}{2}$. (lin. 11.).

(123) Un' Eristico domanderebbe [*Nota* (43)] se vi potesse essere stato qualche altro motivo? Rispondo colla Dissertazione celebratissima di M. Formey *Examen de la Question = Si toutes les Vérités sont bonnes à dire?* = (Atti di Berlino per l'Anno 1777. stampati nel 1779. dalla pag. 333. alla 355.). E poi soggiun-

go

breve e diretta di assegnare il valore di $Sdx(-Lx)^{-\frac{1}{2}}$ nel caso di $x=1$, e dei suoi dipendenti Integrali. Concludo di più che al metodo d'*interpolazione* usato per questo effetto dal Figlio convenga il nome di sussidiario, indiretto, ed obliquo, piuttosto che l'altro di rigoroso, e a *priori*, com' egli à creduto di pubblicare. E finalmente concludo che mentre ancora l'*interpolazione* adoprata dal Figlio avesse diritto di essere il cammino naturale e sicuro [che non lo è nella Teoria delle Serie a paragone del loro *termine generale*] per arrivare a conoscere i valori degli Integrali $Sdx(-Lx)^n$, e particolarmente di $Sdx(-Lx)^{\pm\frac{1}{2}}$, quella medesima *interpolazione* in un modo più universale fosse stata di già promulgata parecchi anni avanti dal Padre, onde a questo solo si debba tutto il merito della scoperta.

NUOVO METODO

D' integrare la Formola Euleriana.

§. II.

16. LA prima *forma* $\infty^{n+1}\, Sx^{\infty} dx(1-x)^n$, alla quale pervenne [sebbene con un giro più lungo] secondo ciò che ò avvertito nel Num. 9. Euler seniore, cercando di stabilire il *termine generale* della Serie $1+1.1+1.2+1.2.3+1.2.3.4+\ldots+1.2.3.4\ldots n$ [124], e ch'egli giudicò inefficace per condursi alla meta delle sue nuove speculazioni, è quella appunto come vado adesso a mostrare, che somministrava con maggior sicurezza e brevità i valori dell'Integiale $Sdx(-Lx)^{\pm\frac{1}{2}}$, e più generalmente $Sdx(-Lx)^{\frac{n'}{2}}$, ed altri consimili, posto $x=1$, per immediata conseguenza dalle più antiche Formole delle *Quadrature* di Newton, tanto illustrate modernamente e promosse dal Ch. Samuello Vince, quanto apparisce dalla sua eccellente *Dissertazione* sopra di questo argomento analitico inserita nella Parte II. del Volume LXXVI. delle *Philosophical Transactions*

go [ΣΟΥΙΔΑΣ alla parola Ἔρις (edizione di Colonia del 1619.), *Scapulæ Lexicon Græcolatinum &c.* (edizione di Amsterdam presso Blaeuw ed Elzevirio del 1652.) al vocabolo Ἐριστικός) che dai veri Dotti in materia di Scienze non si ammette mai *genere eristico*, cioè non si disputa mai *verborum contentione vituperanda*.

(124) Egli considerò ancora il *termine* 1 quando l'*indice* n sia $=0$. Si veda il Tom. V. di Pietroburgo (§. 1. pag. 36., §. 8. a pag. 41. &c., ed in proposito di un'altra Serie §. 25. alla pag. 54.), non meno che il Tom. XVII. di Berlino al §. 12. pp. 95. e 96. Così parimente fece Mac-Laurin nel loco citato dalla *Nota* (62).

ctions della Società Reale di Londra [125]. Non è già mio intendimento quello di far vedere che la scoperta dell' Euler debba ascriversi tra quelle di Newton per aver egli fatt' uso della Formola celebre del *Binomio* quando à dedotti i *termini* della sua Serie dal *termine generale* $Sx^e dx(1-x)^n$, e per integrarla à sciolta la *potenza* $(1-x)^n$ col metodo Newtoniano, siccome à poi replicato dell'altre Serie assegnando i loro *termini generali* mediante le *Quadrature* [126]. Così discorrendola si farebbe gran torto al pregio delle più belle invenzioni dei Matematici, perchè vorrebbe dire l' istesso come privarli del merito di tutto ciò che trovarono in varj tempi, col rimandare Euler a Newton, questo a Des Cartes, e col regresso medesimo a Francesco Vieta, a Leonardo Fibonacci [127], ed agli Arabi, i quali passano per i primi ritrovatori dell'Algebra [128]. Veramente à grandissimo merito l' inventore dell' istrumento d' un' Arte; ma non lo à tale però a mio giudizio da assorbire l'onore e la lode giustamente dovuta a chiunque vada in progresso di tempo perfezionando l' istrumento medesimo o applicandolo a dei nuovi usi, o riunendolo ad altri istrumenti onde accrescere semprepiù la loro attività ed efficacia. Intendo solo di dimostrare che tra le Formole Newtoniane preesistesse tutta preparata e quasi completa la scoperta fatta assai dopo dall' Euler.

17. Principiando dall' indice $n=-\frac{1}{2}$, che per le cose premesse compariva essere il caso più difficultoso di tutti, ognun sà [129] che generalmente in virtù delle Formole mentovate da Newton $\int\frac{z^{2r}dz}{\sqrt{1-z^2}}$ sia a $\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, posta dopo dell' integrazione la variabile $z=1$, come $\frac{1.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11 \ldots\ldots (2r-1)}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12 \ldots\ldots\ 2r}$ ad 1, sino a tanto cioè che il

(125) *A new method of finding Fluents by Continuation* (*Read July* 6, 1786.) dalla pag. 432. alla 443.

(126) Nel summentovato Tom. V. ai §§. 11. (p. 43.) 17. (p. 48) 18. (p. 49.) 19. (p. 50.) 20. (p. 51.) 25. (p. 54.), e di nuovo a p. 91. e segg. Così del To. XI. da pag. 3. a 32.

(127) Dal MS. celebre, che esiste nella Libreria Magliabechiana Fiorentina, di questo valoroso Pisano spero in breve di ricavare dei nuovi lumi per la vera Istoria dell'Algebra sfuggiti a Wallis, De Gua, Montucla, e molti altri. *Iliacos intra muros peccatur & extra.*

(128) Bailly, Gentil, e prima di loro Iluet, ed i Missionarj Gesuiti trovarono tutto lo scibile in Asia.

(129) Mac-Laurin *Traité des Fluxions* al §. 793. pag 221. del Tomo II.

il numero dei *fattori* e nel *numeratore* e nel *denominatore* dell'antecedente di questa ragione sia eguale ad r. Quindi è che se $r = \infty$, debba essere nella solita ipotesi di $z = 1$ adottata sin da principio $\int z^{2.\infty} dz(1-z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13.\ \ldots (2.\infty-1)}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 14.\ \ldots\ 2.\infty} \int dz\,(1-z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13.\ \ldots (2.\infty-1)}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 14.\ \ldots\ 2.\infty} \cdot \frac{C}{2}$, intesa sempre per C la Circonferenza d' un Circolo, di cui sia 1 il Diametro. Ma è parimente chiaro che nel supposto di $n = -\frac{1}{2}$ il *termine generale* della Serie Euleriana [Num. 16.] diventi $\sqrt{\infty}, \int x^{\infty} dx(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ ovvero, facendo per maggior comodo $x = z^2$, e contato sempre l'Integrale da x ovvero $z = 0$ sino ad x ovvero $z = 1$, $2\sqrt{\infty}. \int z^{2.\infty+1} dz(1-z^2)^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\infty}. \int z^{2.\infty} dz(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$ per le regole elementari [130]. Dunque il *termine* della Serie proposta attenente all' *indice* $-\frac{1}{2}$ viene ad essere $= \frac{1.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13.\ \ldots (2.\infty-1)\,2\sqrt{\infty}}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 14.\ \ldots\ 2.\infty} . \frac{C}{2} = C \left(\frac{1.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13.\ \ldots\ldots (2.\infty-1)}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 14.\ \ldots\ldots (2.\infty-2)2\sqrt{\infty}}\right) = \frac{C}{\sqrt{C}} = \sqrt{C}$ in virtù della

(130) Fatta la sostituzione ognun vede che gli *indici* $2.\infty+1$, $2.\infty$ debbano reputarsi eguali, siccome ò avvertito nella *Nota* (47) citando Wallis, e precisamente lo *Scolio* della Proposizione CLXXXII. alla pag. 453. Si può ancora nel caso presente in termini puntuali aggiungere l'autorità dell' Euler (*Institutionum Calculi Integralis Volumen primum* Sez. I. Cap. IX. Prob. 43. § 356. p. 256.). Mentre poi rimanesse scrupolo, verrà dileguato nel num. 21., dove con un metodo più breve tenendo fermo il rigoroso *esponente* $2.\infty+1$ ricaverò le conseguenze medesime.

della Serie di Wallis [131], dimostrata con tutto il rigore analitico dopo di questo famoso Geometra [132].

18. In proposito dell'*indice* $\frac{1}{2}$ accade l' istesso con piccolissima mutazione. Imperciocchè il *termine* della Serie corrispondente a quest' *indice* si fà $2.\infty\sqrt{\infty}.\int z^{2.\infty} dz(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$. Ora sappiamo dalle *Quadrature* di Newton [133] che posta al solito $z=1$ (ch' è quanto dire $x=1$) sia $\int z^{2r} dz(1-z^2)^{\frac{1}{2}} : \int dz(1-z^2)^{\frac{1}{2}} :: \frac{1.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11 \ldots\ldots (2r-1)}{4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 14 \ldots\ldots (2r+2)} : 1$,

e di quì $\int z^{2.\infty} dz(1-z^2)^{\frac{1}{2}} : \int dz(1-z^2)^{\frac{1}{2}} :: \frac{1.3.5.7.9.11.13 \ldots\ldots (2.\infty-1)}{4.6.8.10.12.14.16 \ldots\ldots 2.\infty(2.\infty+2)} : 1$;

 laon-

---

(131) La Serie fondamentale è questa $\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{5}.\frac{6}{7}.\frac{8}{7}.\frac{8}{9}.\frac{10}{9}.\frac{10}{11}.\frac{12}{11}.\frac{12}{13}.\frac{14}{13}$. &c. $=$ A (si veda Wallis nel luogo citato dalla *Nota* (51). Dunque $\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{5}.\frac{6}{7}.\frac{8}{7}.\frac{8}{9}$ $\frac{10}{9}.\frac{10}{11}.\frac{12}{11}.\frac{12}{13}.\frac{14}{13} \ldots\ldots = \frac{C}{4}$, e perciò $2.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{5}.\frac{6}{7}.\frac{8}{7}.\frac{8}{9}.\frac{10}{9}.\frac{10}{11}.\frac{12}{11}$ $\frac{12}{13}.\frac{14}{13} \ldots\ldots = \frac{C}{2}$; laonde $\frac{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 14 \ldots\ldots (2.\infty-2)\sqrt{2.\infty}}{3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13.\ 15 \ldots\ldots (2.\infty-1)} = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{2}}$,

e finalmente $\frac{2.\ 4.\ 6\ 8.\ 10.\ 12.\ 14 \ldots\ldots (2.\infty-2)2\sqrt{\infty}}{3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13.\ 15 \ldots\ldots (2.\infty-1)} = \sqrt{C}$. Combina perfettamente con questa espressione quella di Mac-Laurin altrove accennata (§. 842. pag. 255.), cioè $\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}.\frac{8}{9} \ldots\ldots \frac{n-2}{n-1}\, 2\sqrt{n} = \sqrt{c}$. Ed infatti $c = 2C$, perchè Mac-Laurin suppone il Raggio $=1$. Quindi è che fatto $n = 2.\infty$ per conseguire *la derniere valeur* della Serie, si ottenga $\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}.\frac{8}{9} \ldots\ldots \frac{(2.\infty-2)}{(2.\infty-1)} 2\sqrt{2.\infty} = \sqrt{2C}$,

o sivvero $\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}.\frac{8}{9} \ldots\ldots \frac{(2.\infty-2)}{(2.\infty-1)}\, 2\sqrt{\infty} = \sqrt{C}$ come sopra.

(132) Senza *interpolazione*, nè Calcolo Infinitesimale Euler tra gli altri vi soddisfece (*Introductio in Analysin Infinitorum* Tom. I. §. 185. pag. 146. Cap. XI.). Ivi la sua Serie combina con quella della *Nota* precedente.

(133) Mac-Laurin nel luogo citato dalla *Nota* (129) alla pag. 221.

laonde $2\cdot\infty\sqrt{\infty}\cdot\int z^{2\cdot\infty}dz(1-z^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\ldots\ldots(2\infty-1)2\cdot\infty\sqrt{\infty}}{4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot14\cdot16\ldots\ldots2\cdot\infty(2\cdot\infty+2)}\frac{C}{4}$

$=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\ldots\ldots(2\cdot\infty-1)2\cdot\infty\sqrt{\infty}}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot14\ldots\ldots(2\cdot\infty-2)4\cdot\infty^2}\cdot\frac{C}{2}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\ldots\ldots}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot14\ldots\ldots}$

$\frac{(2\cdot\infty-1)}{(2\cdot\infty-2)2\sqrt{\infty}}\cdot\frac{C}{2}=\frac{C}{2\sqrt{C}}=\frac{1}{2}\sqrt{C}$, come appunto trovarono ambidue gli Euler secondo ciò che ò spiegato nei Num. precedenti.

19. Giova adesso fermarsi a considerar brevemente il pregio di questo metodo tanto più bello, quanto più semplice. Esso si riduce in sostanza ad un caso singolare delle universalissime Formole Newtoniane. Tanto per l'*indice* $\frac{1}{2}$, quanto per l'altro $-\frac{1}{2}$, rispetto al quale pareva al giovane Euler che per rincontrare il *termine* della Serie mancasse all'Analisi un modo semplice luminoso, e diretto, questi *termini* non sono difatto che il *limite* o l'ultimo caso delle Formole ricavate dalle *Quadrature* di Newton, cioè gli ultimi casi degli Integrali $\int z^{2r}dz\cdot\sqrt{1-z^2}$, e $\int z^{2r}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ moltiplicati per una *costante* o sia per un *modulo*. Come appunto dalla Formola del *Binomio* di Newton coll' ajuto primieramente d'un *modulo* [134] seppe il felice ingegno dell'Halley dedurre i valori *trascendenti* di Lx, ed e^x in qualità di singolari ed ultimi casi, o di *limiti* dalla parte dello *zero* di $\frac{x^m-1}{m}$ dalla parte dell'*infinito* di $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$, non diversamente accade delle Formole suddivisate. Il metodo, che quì s'osserva, è così facile ed instruttivo da far vedere ad ogni passo, che l'esponente r si avanzi verso l'∞ come poco a poco vadano a mettersi insieme tutti gli *elementi* numerici della *radice* quadrata della Serie di Wallis, o tutti all'eccezione del primo; cosicchè chiaramente si scorga non solo il vero motivo analitico, in virtù del quale i *termini* della Serie proposta corrispondenti agli *indici* $\pm\frac{1}{2}$ dipendano dalla *quadratura* del Cerchio [lo che si verifica sempre anche delle Formole analoghe $A\int z^{2r}dz(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$, $B\int z^{2r}dz(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$ quando r sia finito],

(134) Questo modulo è $\frac{1}{m}$, posto $m=\infty$. Si veda il luogo citato dalla *Nota* (97).

to], ma l'altro eziandìo, per cui nel caso ultimo o *limite* mentre $r = \infty$, i due *termini* istessi si convertano o nell' intera o nella metà della *radice* quadrata della circolare circonferenza. In vece adunque di far nascere tutta in un tratto questa *radice* o intera o dimezzata della Serie Wallisiana il mio metodo ne dimostra la provenienza, e gradatamente la compone sino dai suoi primi elementi, e ciò che forse meno chiaro apparisce usando del *termine generale* somministrato dall' Euler per mezzo d' infiniti *fattori*, rende perfino minutissimo conto, e ragione della precisa *forma*, che debbono avere gli ultimi elementi della medesima Serie, sebbene affetti dall' Infinito [135]. Consiste a mio giudizio in questa specie di genealogia e filiazione di Formole, siccome ò detto altra volta [136], l' evidenza somma delle scoperte. Non così accade della Funzione Logaritmica $\int dx(-Lx)^{\pm\frac{1}{2}}$, la quale non lascia vedere l' originaria sua connessione col Circolo [137] se non derivandola, come ò fatt' io nel Num. 10., dal vero e primitivo *termine generale* $\infty^{\pm\frac{1}{2}+1}\int x^{\infty}dx(1-x)^{\pm\frac{1}{2}} = 2.\infty^{\pm\frac{1}{2}+1}$ ....

$$\int z^{2.\infty}dz(1-z^2)^{\pm\frac{1}{2}} = \int d((z^2)^{\infty})\left(\frac{-((z^2)^{\infty})^0-1}{0}\right)^{\pm\frac{1}{2}} = \int dx'(-Lx')^{\pm\frac{1}{2}},$$

posto $(z^2)^{\infty} = x'$; di tal maniera che quest' ultima *forma* unicamente provenga da una trasposizione o nuova disposizione dei *termini* della prima, ch' è la sola originale, e somministrata direttamente dall' Algebra. Ecco perchè l' Euler seniore non seppe mai dal puro fonte dell' Analisi dimostrare il commercio che v' era tra la Formula $Sdx(-Lx)^{\pm\frac{1}{2}}$, e l'Area del Circolo [138] senza ricorrere a dei metodi subalterni; commercio che prende nascita, siccome ora ab-

 biamo

(135) Risulta questo pregio dal parallelo che voglia farsi del presente metodo collo sviluppo della medesima Serie indicato nel Numero 5.

(136) Alla pag. 146. del Tom. V. della Società Italiana nel mio *Prodromo &c.*

(137) Ciò risulta da tutto l' esposto nel num. 11., ed altrove ai luoghi ivi citati, dal §. 7. e pag. 7. del Tomo XI. dell'Accademia di Pietroburgo *nunc igitur non solum certum est &c.*

(138) Per l' *indice* $\frac{1}{2}$ non espone altro metodo fuori di quello di rimandare al suo *termine generale* per infiniti *fattori* (Tom. V. di Pietroburgo §. 2. pag. 37. *Ex hujus igitur cum mea convenientia concludere licet terminum indicis* $\frac{1}{2}$ *esse æqualem radici quadratæ ex Circulo, cujus diameter* $= 1$), e dell' indiretto per le *Quadrature* (§. 15. a pag. 47.) *Si ponatur* $n = \frac{1}{2}$ *habebitur respondens terminus* $= Sdx\sqrt{-Lx}$, *cujus valor per quadraturas datur*), ma coll'ajuto d' una Serie infinita diversissima dalla proposta. Si veda il num. 11.

biamo veduto e vedremo più generalmente tra poco in proposito della Formola $\int dx(-Lx)^{\frac{n'}{2}}$, da un' istessa Funzione diversamenre presentata e distribuita. In cambio che la Formola $\int dx(-Lx)^{\pm\frac{1}{2}}$, la quale invoca Logaritmi e Logistiche, sia il vero principio e fondamento analitico di questa ricerca, ell' è piuttosto una conseguenza teoretica del vero principio derivato dalle prime agevolissime integrazioni dei *Differenziali polinomj* [139]; e per quanto si possa dire che quella per la connessione o *identità*, ch' à coll'altra nel caso di $x=z^2=x'=1$, abbia procacciate all'Algebra delle nuove ricchezze, contuttociò ell'è come la strada tortuosa a paragone della diritta. Nemmeno coll'opera delle Serie infinite riescì posteriormente al grand'Euler [140] di decifrare mentre $x=1$ il valore dell'Integrale $\int dx(-Lx)^{-\frac{1}{2}}$. E difatto la Serie, ch'egli offre $(-Lx)^{-\frac{1}{2}}$ $\left(x+\frac{1.x}{2Lx}+\frac{1.3.x}{4(Lx)^2}+\frac{1.3.5.x}{8(Lx)^3}+\frac{1.3.5.7.x}{16(Lx)^4}+\&c.\right)$, si converte facendo $x=1$ nell' altra Serie infinita $\frac{1}{\sqrt{0}}\left(1+\frac{1}{2.0}+\frac{1.3}{2^2.0^2}+\frac{1.3.5}{2^3.0^3}+\frac{1.3.5.7}{2^4.0^4}+\&c.\right)=\frac{\infty^{\frac{1}{2}}}{2^0}+\frac{1.\infty^{\frac{3}{2}}}{2^1}+\frac{1.3.\infty^{\frac{5}{2}}}{2^2}+\frac{1.3.5.\infty^{\frac{7}{2}}}{2^3}+\ldots\ldots\frac{1.3.5.7\infty^{\frac{9}{2}}}{2^4}+\&c.$ Serie a dire il vero elegantissima [141], ma diver-

---

(139) Tutto dipende dal solo *canone* della *Quadratura* delle Curve di Newton, che Mac-Laurin à così bene spiegato al suo solito nel §. 792. alle pag. 219. e 220. *Traité des Fluxions*. (Bougainville *Traité du Calcul Integral.* P. I. Cap. IV. V. VI. VII. e VIII).

(140) *Institutionum Calculi Integralis Volumen primum &c.* alla Sez. I. Cap. IV. nello Scolio §. 214. pag. 131.

(141) Tra l'altre proprietà della Serie mi piace rilevar quella che tutti i suoi *coefficienti* $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1.3}{2.2}, \frac{1.3.5}{2.2.2}, \frac{1.3.5.7}{2.2.2.2}$, &c. siano precisamente gl' istessi della progressione de' *termini* della Serie Euleriana $\sqrt{c}$, $\frac{1}{2}.\sqrt{c}$, $\frac{1.3}{2.2}.\sqrt{c}$, $\frac{1.3.5}{2.2.2}\sqrt{c}$, $\frac{1.3.5.7}{2.2.2.2}\sqrt{c}$, &c. per l' *indici* $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$, &c. a forma del num. 6. e del 21. Forsechè stà nascosto in questa ammirabile corrispondenza qualche mistero analitico?

divergente e che nulla conclude per ricavarne il suo valore $\sqrt{C}$, che pure à e deve avere in vigore delle cose premesse, quantunque si tenga conto della *costante*. Questa *costante* dedotta dall'ipotesi di $x=0$ essendo o perchè si converte in

$$-0\left(\frac{\infty^{-\frac{1}{2}}}{2^2}-\frac{1\cdot\infty^{-\frac{3}{2}}}{2^1}+\frac{1\cdot3\cdot\infty^{-\frac{5}{2}}}{2^2}-\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\infty^{-\frac{7}{2}}}{2^3}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\,\infty^{-\frac{9}{2}}}{2^4}-\ldots\ldots\&c\right),$$

posto al solito ∞, come *segno* dell' Infinito *armonico*, non serve per nessun modo nè a modificare l' asprezza nascosta nè ad illuminare la profonda oscurità della Serie Euleriana. Chi mai difatto indovinerebbe che in quella Serie fosse riposta la *radice* quadrata della Circonferenza del Circolo? Per il contrario egli è assai manifesto quanta luce ed universalità porti seco il *termine generale* da me spiegato

$$\infty^{n+1}\int x^{\infty}dx(1-x)^n=2\cdot\infty^{n+1}\int z^{2\cdot\infty}dz(1-z^2)^n,$$

l' una e l' altra *forma* soddisfacendo egualmente posto $x=z^2=1$ a tutti i casi possibili [142]. Si vede subito che trattando d'*indici* interi e *positivi*, fuori del caso di $n=\infty$, quella Funzione denoti sempre una grandezza finita, cioè $1.\ 2\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ldots\ldots\ldots n$, e se ne vede chiara la causa, perchè il suo valore corrispondente all' indice n si risolve in

$$\infty^{n+1}\left(\frac{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ .\ 6\ldots\ldots\ldots n}{(\infty+1)(\infty+2)(\infty+3)(\infty+4)(\infty+5)(\infty+6)\ldots\ldots[\infty+(n+1)]}\right)=\infty^{n+1}\left(\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ldots\ldots n}{\infty^{n+1}}\right)$$

[143], compensandosi e distinguendosi gli Infiniti mirabilmente tra loro

(142) Ancora senza la sostituzione di $x=z^2$ si rende chiara la connessione col Circolo quando n sia $=\pm\frac{1}{2}$ &c. Imperciocchè $\int x^{\infty}dx\sqrt{1-x}$, $\int\frac{x^{\infty}dx}{\sqrt{1-x}}$ dipendono come vedremo nei numeri 21. e 22. dalla *quadratura* del Circolo (Tom. XI.) di Pietroburgo § 8. pag. 8.

(143) Wallis ed Euler nei luoghi citati dalla *Nota* (130). Leggasi ancora il num. 4° verso la fine.

ro [144]. Si vede chiaro altresì che la Funzione medesima per i due casi dell'indice $n = \pm\frac{1}{2}$ sia di grandezza finita malgrado gli Infiniti, dei quali è composta, siccome apparisce dalle due Serie esposte nei Numeri 17. e 18., dove parimente gli Infiniti del *numeratore* e *denominatore* si contrabbilanciano in modo da produrre un *quoziente* finito. Con egual chiarezza si scorge come e perchè nei due ultimi casi l'istessa Funzione trasformisi in una Funzione della Periferìa Circolare. Non dissimil chiarezza ritroveremo rapporto ai *termini* attenenti agli altri *indici* $\frac{n'}{2}$ colla sola guida dell' istessa Funzione *canonica* nel Numero che viene in appresso. Finalmente è facile ricavare dal Num.18. in che consistesse l'abbaglio di Mac-Laurin, del quale ò parlato nella *Nota* 62. Seguitando il metodo d'*interpolazione* adoprato dal Ch. Autore [145] mi pare che in vece della sua Formola ultima $L\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\sqrt{n+1}\right)$ si arrivi piuttosto all'altra $L\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{2}\right)$, e perciò venga ad essere il termine ricercato per l'*indice* $\frac{1}{2}$ della Serie 1+1 . 1+1 . 2+1 . 2 . 3+1 . 2 . 3 . 4+ .... 1 . 2 . 3 . 4 .... n, ossia il *termine* „*qui est entre les deux premiers termes principaux*„ [146], quel *Numero*, al quale appartenga il predetto Logaritmo *iperbolico*, e vale

---

(144) Non deve adesso far poca meraviglia se $\frac{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,\ldots\ldots\,n}{\infty^{n+1}} = \int x^{\infty-1}dx(-Lx)^n$ nel caso di $x=1$ come dopo del Bernoulli ritrovò l' Euler (*Instit. Calc. Integr.* Corol. 2. a pag. 131.). E difatto quell'espressione *trascendente* sciolta nel modo Halleyano, e dipoi nell'altro da me immaginato (si vedano i numeri 10. ed il presente) acquista la forma $\int x^{\infty-1}dx\left(\frac{1-x^0}{0}\right)^n = \int\frac{d(x^\infty)}{\infty}\left(\frac{1-x^0}{0}\right)^n$, e questa nell'ipotesi assunta dev'essere $=\int\frac{d(x^\infty)}{\infty}\left(1-x\right)^n$, ch' è quanto dire $\frac{1}{\infty^n}\cdot\int\frac{d(x^\infty)}{\infty}\left(-L(x^\infty)\right)^n = \int\frac{d(x^\infty)}{\infty}\left(-Lx\right)^n$.

(145) Si legga il Capitolo IV. del Libro II. delle *Flussioni* dal §. 852. e pag. 261. sino alla fine dell' istesso Capitolo.

(146) *A' égales distances de chacun*, cioè tra 1, 1 . 1, ossia alla distanza $\frac{1}{2}$. (§. 856. pag. 263. del luogo citato).

e vale a dire $\frac{\sqrt{\frac{c}{2}}}{\sqrt{2}}$ [e non già $\frac{\sqrt{c}}{2}$ come scrisse Mac-Laurin (147)] posta c la Circonferenza d'un Circolo, che abbia 1 per Raggio, o piuttosto $\frac{\sqrt{C}}{2}$ quando la Sigla C rappresenti la Periferìa Circolare riferita ad 1 come Diametro [148].

20. Per gli *indici* $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$, &c., $\frac{n'}{2}$ l'istesse Formole ricavate dal Trattato delle *Quadrature* di Newton fanno conoscere non differentemente da ciò, che si è veduto nei Num. 17. e 18., i respettivi *termini* della Serie tenendo sempre fissa la *forma* $2 . \alpha^{n+1}$ .... $\int z^{2.\infty} dz(1-z^2)^n$ del *termine generale*. Riscontreremo difatto delle Serie infinite, che non diversificano dalla *radice* quadrata di quella del Wallis, ch' io chiamerò la *fondamentale*, se non per essere mutilate o mancanti di qualche *fattore* o di alcuni *fattori*. All' effetto che delle Serie così mutilate si riducano alla *fondamentale* adopero il metodo dei *coefficienti*, siccome l' ò di già usato nel numero 18.; metodo presso a poco consimile a quello introdotto nell' Analisi sino del M.DCC.LX. da Giovanni-Jacopo Dortous De Mairan (149), e molto prima di lui da Jacopo Bernoul-li

(147) Non pare che possa essere error tipografico, perchè soggiunse (p.264. in principio) *par conséquent le terme requis est égal à la moitié de la racine quarrée de la circonférence, dont le rayon est* 1.

(148) Così sempre l'adopera Wallis nei luoghi citati. All' opposto Mac-Laurin (§§ 842. 844. 845. 854. 856.). Parimente l'Euler (*Introd.* T. I. Cap. VIII. &c.).

(149) Memorie della R. Accademia delle Scienze di Parigi alla pag. 283. e segg. *Remarque sur les Séries infinies*. Nel riflettere sù queste Serie mi è comparsa molto elegante la disposizione che siegue.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \frac{1}{100} + \text{\&c.}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \frac{1}{100} \quad \text{\&c.}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{81} \quad \text{\&c.}$$

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{64} \quad \text{\&c.}$$

$$\frac{1}{25} + \frac{1}{100} \quad \text{\&c.}$$

&c. &c.

Difatto

li (150). Nel caso adunque di $n = \frac{3}{2}$ abbiamo $2 . \infty^2 \sqrt{\infty} \int z^{2.\infty}$

$dz(1-z^2)^{\frac{3}{2}} = 2 . \infty^2 \sqrt{\infty} \left(\frac{1. 3. 5. 7. 9. 11. 13 \ldots\ldots (2\infty - 1)}{6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. \ldots\ldots (2.\infty + 4)}\right) \ldots\ldots$

$\int dz(1-z^2)^{\frac{3}{2}}$ per le solite regole Newtoniane (151) [limitandosi come sopra l' Integrale da $z=0$ sino a $z=1$], ch' è quanto dire

$= \frac{1. 3. 5. 7. 9. 11. 13 \ldots\ldots (2.\infty-1)\, 2 . \infty^2 \sqrt{\infty}}{6.8.10.12.14.16.18\ldots (2.\infty-2)(2.\infty)(2.\infty+2)(2.\infty+4)} \left(\int dz\right.$

$\left.\sqrt{1-z^2} - \int dz . z^2 \sqrt{1-z^2}\right) = 4\left(\frac{3.5.7.9.11.13.15 \ldots (2.\infty-1)}{2.4.6.8.10.12.14 \ldots (2.\infty-2) 2\sqrt{\infty}}\right) \ldots\ldots$

$\left(\int dz\sqrt{1-z^2} + \frac{z}{4}(1-z^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}\int dz\sqrt{1-z^2}\right) = \frac{4}{\sqrt{C}} . \frac{3}{4} . \frac{C}{4} = \frac{1 . 3}{2 . 2}\sqrt{C}$ a tenore

---

Difatto in essa tanto le *colonne* orizzontali, quanto le diagonali omologhe sono perfettamente *identiche*. Chiamata dunque A la superior *colonna* orizzontale o la prima diagonale, ognun vede l' Equazione $A + \frac{A}{4} + \frac{A}{9} + \frac{A}{16} + \frac{A}{25} + \frac{A}{36} + \frac{A}{49} + \frac{A}{64} + \frac{A}{81} + \frac{A}{100} +$ &c., cioè $\frac{CC}{6}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \frac{1}{100} + \&c.\right) = \frac{C^4}{36}$, eguale alla Somma di tutte le Serie, delle quali è composta quella infinita *Figura* numerica, che non è diversa, come apparisce evidentemente, da $\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \frac{1}{100}\ \&c.\right)^2$.

(150) *Positionum arithmeticarum de Seriebus infinitis*, *earumque Summa finita Pars altera* = *Basileæ* 1692. = nel Tom. I. al num. XXIV. (*Jacobi Bernoulli Opera* = *Genevæ* 1744), ed al num. LIV.

(151) Si consulti Mac-Laurin nel luogo citato al §. 792. (Tom. II. pag. 219. e 220.). Questo §. è il fondamento di tutto, e nasce subito dai Teoremi di Newton, come avverte egli stesso nel §. 789. e segg. Dopo di Mac-Laurin merita di esser letto il *Trattato* del Calcolo Integrale di Bougainville, e principalmente il Numero LXXXVIII. del Cap. VII. Par. I. alle pag. 114. 115., non meno che il Cap. II. delle *Istituzioni* di Calcolo Integrale dell'Euler nella Sezione I. del I. Volume.

tenore delle dimostrazioni premesse (152), giacchè posto $z=0$, non meno che $=1$, svanisce l' integrale algebraico $\frac{1}{4}z\left(1-z^2\right)^{\frac{3}{2}}$. Perquesto motivo a fine d'abbreviare il cammino tralascierò di notare in appresso tutte le parti *algebraiche* degli Integrali, che pur troppo si conoscono in seguito delle ordinarie *Tavole* d' integrazione dei Differenziali Binomj (153). Sia ora l' *indice* $n=\frac{5}{2}$, e perciò $2.\infty^3$

$$\sqrt{\infty}\int z^{2.\infty}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{5}{2}}=\frac{1.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{8\ 10.12.14.16.18.20\ldots(2\infty-2)(2.\infty)(2.\infty+2)(2.\infty+4)}$$

$$\frac{(2.\infty-1)2.\infty^3\sqrt{\infty}}{(2.\infty+6)}\left(\int dz\sqrt{1-z^2}-2\int dz.z^2\sqrt{1-z^2}+\int dz.z^4\sqrt{1-z^2}\right)=$$

$$2.6\ \frac{3.5.7\ 9.11\ 13.15\ldots\ldots(2.\infty-1)}{2.4.6.8.10.12.14.\ \ldots\ldots(2.\infty-2)2\sqrt{\infty}}\Bigg)\left(\int dz\sqrt{1-z^2}-\frac{1}{2}\int dz\sqrt{1-z^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{8}\int dz\sqrt{1-z^2}\right)=\frac{12}{\sqrt{C}}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{C}{4}=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2}\sqrt{C}$$, come per questo *termine intercalato* egualmente che per gli altri, i quali precedono e sieguono, abbiamo trovato nei Numeri 6. e 14. Aperta e conosciuta la strada poco vi vuole a trascorrerne il rimanente con piè fermo e sicuro. Così il *termine* della Serie corrispondente all' *indice* $\frac{7}{2}$ ossia $2.\infty^4\sqrt{\infty}\int z^{2.\infty}dz(1-z^2)^{\frac{7}{2}}=\frac{1.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.13.\ \ldots\ldots}{10.12.14.16.18.20.22.\ \ldots\ldots}$

$$\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.\infty-1)2.\infty^4\sqrt{\infty}}{\ldots\ldots(2.\infty-2)(2.\infty)(2.\infty+2)(2.\infty+4)(2.\infty+6)(2.\infty+8)}$$

$$\left(\int dz\sqrt{1-z^2}-3\int dz.z^2\sqrt{1-z^2}+3\int dz.z^4\sqrt{1-z^2}-\int dz\ z^6\sqrt{1-z^2}\right)$$

$$=2.\ 4.\ 6\left(\frac{3.5.7\ 9.11.13\ 15.\ \ldots\ldots(2.\infty-1)}{2.\ 4.6.8.\ 10.\ 12.\ 14.\ \ldots\ldots(2.\infty-2)2\sqrt{\infty}}\right)\left(\int dz\sqrt{1-z^2}-\frac{3}{4}\right.$$

$$\left.\int dz\sqrt{1-z^2}+\frac{3}{8}\int dz\sqrt{1-z^2}-\frac{5}{64}\int dz\sqrt{1-z^2}\right)=\frac{48}{\sqrt{C}}\cdot\frac{35}{64}\cdot\frac{C}{4}=\frac{1.3.5.7}{2.2.2.2}\sqrt{C}$$

non diversamente dagli Euler. E qui si noti di nuovo come gra-

(152) Soprattutto nella *Nota* 131.
(153) Mac-Laurin, e Bougainville nei luoghi citati dalla *Nota* 151.

do a grado, fermo stante il *numeratore*, ritirisi sempre più indietro il *denominatore* della *radice* quadrata della Serie originale ricavata da quella di Wallis (154) a proporzione che cresce l' *indice* $\frac{n'}{2}$ non dissimile in questo al giuoco che accade nelle ingegnose *Righe* di Gunter (155). Partendo dal caposaldo dell' indice $-\frac{1}{2}$, dove a forma del Num. 17. la Serie è tutta compiuta e perfetta, il suo *denominatore* viene ad essere mutilato della prima *cifra* 2 crescendo l' *indice* d'un' *unità*, o diventando $\frac{1}{2}$, delle due prime cifre 2, 4 crescendo di due *unità* o diventando $\frac{3}{2}$, delle tre prime *cifre* 2, 4, 6 crescendo l' *indice* di tre *unità* ossia diventando $\frac{5}{2}$, delle quattro prime cifre 2, 4, 6, 8 crescendo di quattro *unità* e perciò diventando l' *indice* $= \frac{7}{2}$, e generalmente di $\frac{n'+1}{2}$ delle prime *cifre* quando $\frac{n'}{2}$ fosse l' *indice* del *termine* ricercato. Queste *cifre* mutilate si restituiscono poi facilmente al *denominatore* medesimo facendole ancora passare nel *numeratore*, ch' è come dire per mezzo di *coefficienti*, onde tutto si appoggi all' unica e sempre ricomposta Serie originale di Wallis. Bello è il vedere la distribuzione, la forma, il valore, e la qualità degli ultimi *fattori* del *numeratore* e *denominatore* sebbene *Infiniti*, presenti all'occhio dell' Analista sino a tanto che n' non convertasi nell' Infinito *ordinario* (156) come se fossero altrettante grandezze *finite*. Ma v' è un modo anche più compendioso [che sempre però si parte da Newton] d' intercalare gli istessi

(154) Se alla Serie, di cui parliamo, dovesse esser data la *forma* più semplice, più elegante, e più rigorosamente dell' inventore, sarebbe $\frac{(3^2-1)\,(5^2-1)}{3^2\;.\;5^2\;.}$ $\frac{(7^2-1)\,(9^2-1)\,(11^2-1)\ldots\ldots[(2.\infty+1)^2-1]}{7^2\;.\;9^2\;.\;11^2\ldots\ldots(2.\infty+1)^2}$, come apparisce dalla pag. 469. del Tom. I. delle Opere Wallisiane. Leonardo Euler à generalizzata la Serie tanto nel luogo citato dalla *Nota* (61), ed alla pag. 7. §. 7, egualmente che nel Tomo rammentato dall'altra *Nota* (48) al §. 15. e pag. 40. Del resto si confronti il quì detto col num. 2.

(155) *Sliding Gunter* (Nota 35.). Vi sono in tutte le Lingue dei termini, che non si trasportano in altre senza scapito di valore. Bisogna dunque soffrirgli tali quali sono per non far torto alle idee. Mi rammento d'avere scritto una volta *analfabèto*, perchè molti l' avevano scritto prima di me, e tra gli altri Giovanni Cinelli (ved. Opera citata dalla *Nota* 13. alla pag. 446.), il quale passava presso la *Crusca* per un buono Scrittor Fiorentino.

(156) La ragione di ciò si desume dalla dottrina spiegata nel Numero 3. e quindi nel 4.

si termini sopraespressi, ed altri occorrendo. Prendo l'esempio dall' *indice* $= \frac{9}{2}$, e trovo (157) per *termine* della Serie $2.\infty^5\sqrt{\infty}\int z^{2.\infty}$

$$dz(1-z^2)^{\frac{9}{2}} = \left(\frac{1.\ 3.\ 5.}{12.\ 14.\ 16.}\frac{7.\ 9.\ 11.\ 13.\dots\dots 2.\infty^5\sqrt{\infty}}{18.\ 20.\ 22.\ 24.\dots\dots}\right)\frac{63}{128}.\ \frac{C}{4} = \frac{4.\ 6.\ 10.}{\sqrt{C}}$$

$$\frac{7.\ 9}{2^9}.\ C = \frac{1.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9}{2.\ 2.\ 2.\ 2.\ 2}.\ \sqrt{C}$$ al qual' ultimo valore si arriva tenendo esatto conto del *modulo* $2.\ \infty^5\sqrt{\infty}$, e cautamente osservando che $(2.\infty)(2.\infty+2)(2.\infty+4)(2.\infty+6)(2.\infty+8)(2.\infty+10) = 2^6.\ \infty^6$, e perciò $\frac{2.\ \infty^5\sqrt{\infty}}{2^6.\ \infty^6} = \frac{1}{2.\ 8(2\sqrt{\infty})}$ non altrimenti dall' operato di sopra. Questi esempj abbondantemente dimostrano l'uso universale del metodo, e l'evidenza somma nell'adoprarlo. Basterà dire che tutto si aggira sopra dei soli elementi della Serie Wallisiana, dei quali fecero uso anche Biagio Pascal ed Jacopo Bernoulli per risolvere alcuni Problemi spinosi dei *Giuochi d'azzardo* sino dal nascimento della Teoria dei *probabili* (158).

21. Quanto si approssimasse Mac-Laurin a possedere il metodo da me sviluppato poc' anzi, non importa diffusamente mostrarlo. Imperocchè conosceva benissimo il modo tenuto dall' Euler per racchiudere uno o più *termini* d' una Serie *trascendente* sotto di una Funzione *differenziale*, che non ammettesse generalmente *Integrale algebrico*, siccome chiaro apparisce dalla *Nota* apposta al §. 853. del

(157) *Institutionum Calc. Integr. L. Euler*. T. I. nella *Tavola* degli Integrali alle pag. 237. e 238., che può essere facilmente continovata cogli istessi principj Newtoniani.

(158) *Ars conjectandi = Opus posthumum = Basileæ*, 1713. a pag. 107. = e segg. Si veda ancora la Lettera di M. Pascal al Sen. Pietro De Format alla pag. 180. della *Raccolta* dell' Opere di quest' ultimo Matematico, stampata in Tolosa l'anno 1679. Dopo i dubbj di Daniello Bernoulli, e di M. D'Alembert (*tantæne animis cælestibus iræ?*) sopra i fondamenti del Calcolo delle *probabilità*, e dopo l'applicazione profonda di questo Calcolo pubblicata nel 1785. a Parigi dal Marchese De Condorcet (*Essai sur l'application de l'Analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*) avevo anni addietro tentato di rifondere questa parte interessantissima delle facoltà Matematiche. Ma l'abbozzo è tuttora informe in un mio MS., che vien distinto col titolo d' *Esame delle regole fondamentali del Calcolo della Probabilità*.

del suo Trattato delle Flussioni (159). D'altra parte sono di lui quelle Formole, che hanno servito di base nei Numeri precedenti 17. 18. e 20. per tutta questa speculazione. Mancò un passo solo a Mac-Laurin, e fu quello di non accorgersi che spinte ancora le istesse Formole all' infinito, ed aggiuntovi come *fattore* il *modulo* ∞^{n+1}, rappresentassero sempre delle grandezze *finite*, dipendenti dalla Serie del Wallis, da lui molto promossa ed illustrata (160), e vale a dire dalla *Quadratura* del Circolo. Di quì ne nacque che per intercalare dei *termini* nella Serie Euleriana tra quelli degli *indici* interi e *positivi* (161) fosse obbligato a chiamare in soccorso l' *interpolazione* appoggiata alle *differenze* delle Ordinate ed alla Geometria delle Curve (162). Leonardo Euler s' era inoltrato più avanti, sebbene scrivesse prima del Matematico Inglese (163). Aveva incontrata difatto la vera *forma* del *termine generale* $\infty^{n+1} \int x^{\infty} dx (1-x)^{n}$, siccome ò già detto (164), e nel Tomo XI. dell' Accademia Imperiale di Pietroburgo (165) aveva osservato esser sempre

(159) Pag. 262. del Tom. II. della solita traduzione fatta in Francese dal Gesuita Pezenas. Di questo *termine sommatorio* della Progressione *armonica* naturale $\int dx \frac{(1-x^n)}{1-x}$ mi occorrerà di parlarne al num 28. del §. III.

(160) Il passo più grande, che abbia fatto Mac Laurin in proposito di quella Serie, consiste dal verso 9. sino alla metà del vers. 15. della pag. 255. del precitato Tomo II. al §. 842., dove è compresa questa felice eguaglianza $8 \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{80}{81} \cdot \&c. = 4 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{16}{25} \cdot \frac{36}{49} \cdot \frac{64}{81} \cdots\cdots \frac{(n-2)^2}{(n-1)^2} \cdot n$, posto n (dopo del 2) eguale a qualunque numero pari. (Sia corretto lo sbaglio di Stampa $\frac{n-1}{n-2}$ all'istessa pag. v. 5. cambiandosi in $\frac{n-2}{n-1}$).

(161) Numero 19. verso la fine. Egli non parlò mai del *termine* corrispondente all' *indice* $-\frac{1}{2}$, e molto meno ad altri *indici negativi*.

(162) Si veda tutto il metodo di Mac-Laurin dal §. 827. (pag. 244.) sino a tutto il §. 856. (pag. 264.) del Cap. IV. del Libro II. delle *Flussioni*.

(163) Le prime speculazioni dell'Euler sono del $173\frac{0}{1}$. (*Nota* 1.), quando la prima edizione originale del *Treatise of Fluxions* è del 1742.

(164) Numero 10.

(165) Alla pag. 8. del §. 8. Ma si corregga l'error tipografico occorso negli ultimi *fattori* $\frac{(2f-2)}{(f+1)}$, che debbon essere $\frac{(2f-2)}{(2f+1)}$.

pre [posto f qualunque numero intero e positivo] $\int x^{f-1} dx(1-x)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{2.2.4.6.8.10.\ldots(2f-2)}{3.5.7.9.11.13.\ldots(2f+1)}$. Egli era di già avvezzato a considerare tanto nel Tomo V:, quanto nell' XI. degli antichi *Atti* di Pietroburgo l'esponente $f = \infty$, non meno che $f-1$ e più generalmente $f \pm a = f$ in questo caso speciale ossia *limite* di tutti i casi possibili, discorrendo di altre Serie infinite (166) e nella solita supposizione che l'Integrale si estenda da $x = 0$ sino a $x = 1$. Cosa dunque mancava al grand' Euler per innalzare dai veri suoi fondamenti questa bella Teoria? Nulla più che unire tra loro quelle due *forme* d'Integrali, e farne una sola per l'*indice* $\frac{1}{2}$, cioè $\infty\sqrt{\infty}\int x^{\infty}$

$dx(1-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{4.6.8.10.12.14.16.\ldots\ldots(2.\infty-2)(2.\infty)2\sqrt{\infty}}{3.5.7.9.11.13.15.\ldots\ldots(2.\infty-1)(2.\infty+1)} = \frac{1}{2}\ldots$

$\left(\frac{2.4.6.8.10.12.14.16.\ldots(2.\infty-2)2\sqrt{\infty}}{3.5.7.9.11.13.15.17.\ldots(2.\infty-1)}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{C}$ in virtù degli esposti principj. Ecco adunque la maniera breve, e diretta di sciogliere questo Problema insieme cogli altri per l'*indice* $-\frac{1}{2}$ e per $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$, &c., $\frac{n'}{2}$. Euler aveva ridotti a delle *Tavole* semplicissime siffatti Integrali per il caso di $x = 1$ in seguito delle Formole date da Newton (167). Non vide allora sin dove potesse estenderne l'uso. Per esempio sapeva (168) che $\int z^{2n} dz(1-z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1.3.5.7.\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6.8.\ldots\ldots 2n} \cdot \frac{C}{2}$ quando $z = 1$, e sapeva di più (169) che posto ancora

(166) Per il Tom. V. l'ò di già detto nel num. 10., e per l' XI. basterà riscontrare §. 39. alla pag. 26. ed il § 40. alla medesima pagina.

(167) *Nota* 157.

(168) Coroll. I. al §. 121. del Cap. II. della I. Sezione a pag. 80. e Problema 38. del Capo VIII. al §. 330. dell'istessa Sezione e pag. 231. del I. Volume *Instit. Calc. Integr.* Sebbene questo Volume fosse pubblicato non prima del 1768. dall'Accademia Imperiale di S.t Petersbourg, ognun sà che il MS. dell'Autore era l'opera dei Studj suoi giovanili.

(169) Problema 43. del Capitolo IX. della Sezione I. del Tom. I. delle *Istituzioni*

cora $n = \infty$, fosse $\int z^{2.\infty} dz (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1.\ 3.\ 5.\ 7.\ \ldots\ldots\ (2.\infty-1)}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ \ldots\ldots\ 2.\infty}$ $\int dz (1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$; ch' è il Teorema Mac-Lauriniano (170). Aggiunto il *modulo* $2\sqrt{\infty}$, non derivava subito $2\sqrt{\infty} \int z^{2.\infty} dz (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3.\ 5.\ 7.\ 9.\ \ldots\ldots\ (2.\infty-1)}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ \ldots\ldots\ (2.\infty-2) 2\sqrt{\infty}}$. $C = \frac{C}{\sqrt{C}} = \sqrt{C}$? Sì; ma sono quei facili difficilissimi in materia di Scienze (171), e mai gli venne in pensiere la giunta del *modulo*, senza di cui restava sempre incompleto il suo *coefficiente*. Non se n' accorse tampoco dove magistralmente trattò degli Integrali di questa *forma* $\int d\varphi . Sen.^{2n} \varphi$, $\int d\varphi . Cos.^{2n} \varphi$ nell' eccellente Capitolo V. della I. Sezione del Tom. I. delle *Istituzioni di Calcolo Integrale* (172), per quanto vedesse abbozzati ed a poco a poco riuniti nei coefficienti degli ultimi termini gli elementi tutti numerici della Serie di Wallis. Questi *ultimi termini* sono $\frac{1.\ 3.\ 5.\ 7.\ \ldots\ldots\ (2n-1)}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ \ldots\ldots\ 2n}$. φ sì per l'uno, come per l' altro Integrale

---

tuzioni citate al §. 356. e pag. 255. E' però sbagliata l'Equazione $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1.3.5.7.\ \ldots\ldots\ 2i}{2.4.6.8.\ \ldots\ldots\ (2i-1)} \int \frac{x^{2i} dx}{\sqrt{1-xx}}$, essendo la vera $\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ \ldots\ldots\ 2i}{1.\ 3.\ 5.\ 7.\ \ldots\ldots\ (2i-1)}$ $\int \frac{x^{2i} dx}{\sqrt{1-xx}}$.

(170) Sia consultato il num. 17.

(171) Anche in materia di stile il disteso più fluido e più chiaro suol essere effetto di grande studio e difficultà. Checchè sia della divina Commedia di Dante, sopra di cui molte quistioni si agitano tra gli eruditi, merita di esser letto ciò che de' *Saggi &c.* dell'Accademia del Cimento, e del loro Estensore Conte Lorenzo Magalotti accenna la pag. 417. del Volume I. d'*Atti e Memorie &c.* citato dalla *Nota* 13., non meno che l'altra pag. 444. in proposito di Carlo Dati.

(172) Ai §§. 242. e 245. (pp. 152. 153.). Sono in sostanza le stesse Formole del Capo II. alle pag. 79 e 80. E' però da sapersi che l'Autore celebratissimo le possedeva molto avanti (si veda la *Nota* (343) alla pag. 288. della mia Esercitazione *De Calculo Integralium*).

tegrale (173). Era facile il Corollario $\int d\varphi\, \text{Sen.}^{2.\infty}\varphi$ ovvero $\int d\varphi.\, \text{Cosen.}^{2.\infty}\varphi$ $= \frac{1.\,3.\,5.\,7.\,\ldots\,(2.\infty-1)}{2.\,4.\,6.\,8.\,\ldots\,2.\infty}\,.\,\varphi$ ognivolta che $\varphi = \frac{C}{2}$ posto 1 il diametro, che vale l' istesso di $\frac{\Pi}{2}$ posto il Raggio $= 1$ siccome alcuna volta praticò l' Euler (174). Ma tanto il primo, quanto il secondo di quelli Integrali, se z sia eguale al Seno o Coseno dell' Arco φ, prende la forma di $\int z^{2.\infty} dz (1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$. Dunque quando $z=1$, partendo da $z=0$, e viceversa (175), averemo $2\sqrt{\infty}\int d\varphi\,.\, \text{Sen.}^{2.\infty}\varphi$ $= 2\sqrt{\infty}\int d\varphi\,.\, \text{Cosen.}^{2.\infty}\varphi = \frac{1.\,3.\,5.\,7.\,\ldots\,(2.\infty-1)2\sqrt{\infty}}{2.\,4.\,6.\,8.\,\ldots\,2.\infty}\,.\,\frac{C}{2} = \sqrt{C}$ come sopra, chi avrebbe mai detto ad Euler il Figlio che nel *limite* di questa Funzione agevolissima trigonometrica $2\sqrt{n}\,.\int d\varphi\,.\, \text{Sen.}^{2.n}\varphi$ stasse involto e racchiuso quel termine $\int dx(-Lx)^{-\frac{1}{2}}$, ch' egli con tanta pena si pose ad *interpolare* nella sua Serie (176); dimodochè queste due espressioni *trascendenti* $2\sqrt{\infty}\int d\varphi\,.\, \text{Sen.}^{2.\infty}\varphi$ e $\int dx(-Lx)^{-\frac{1}{2}}$ siano nella fatta supposizione esattamente equivalenti tra loro? Adesso sì che squarciato ogni velo più vivamente risplende ed è nel suo mag-

---

(173) Difatto chiamando $x = \text{Sen.}\,\varphi$, la prima Funzione è $\int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-xx}}$, e chiamando $x = \text{Cosen.}\,\varphi$, è parimente l'altra Funzione $\int \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-xx}}$, purchè nella prima l' integrale s'intenda contato da $x=0$ sino ad $x=1$, e nell'altra egualmente da $x=0$ o sino ad $x=1$, ch'è quanto dire dalle due opposte estremità del Quadrante di Circolo.

(174) Nella sua *Introduzione all'Analisi degli Infiniti* e nominatamente al Capo VIII. §. 126. e pag. 93. del I. Volume intese per la Sigla Π la Semicirconferenza riportata al Raggio 1. All'opposto nelle *Istituzioni di Calcolo integrale* (T.I. §. 331. p. 231.) egli scrisse *semper enim* Π *designat peripheriam circuli, cujus diameter* $= 1$.

(175) Colla sola differenza accennata in fondo della *Nota* 173.

(176) Si veda dal num. 12. sino al 15. E poi si legga il num. 23.

maggior lume la divisata corrispondenza meravigliosa tra l'Iperbola e il Cerchio. Nè qui finisce l'enumerazione dei mezzi analitici, che aveva in pronto Euler il Padre a fine di render perfetta la sua ricerca. Senza dire delle maniere sino ad ora spiegate, le quali ammettono d'essere estese con tutta facilità ancora agli altri *indici* $\frac{n'}{2}$ a norma del Numero precedente verso la fine, egli aveva presente da $x=0$ sino a $x=1$ l'Integrale $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}} = \frac{1}{k} \cdot \frac{n(m+k)}{m(k+n)} \cdot \frac{2n(m+k+n)}{(m+n)(k+2n)} \cdot \frac{3n(m+k+2n)}{(m+2n)(k+3n)} \cdot \frac{4n(m+k+3n)}{(m+3n)(k+4n)}$ &c. sciolto così in infiniti *fattori* (177). Se avesse supposto $n=2$, $k=$ a qualunque numero *dispàri* della Serie naturale, $m=2.\infty$, conseguiva immediatamente l'intento. Abbiasi per esempio $k=7$, onde $\frac{k-n}{n}=\frac{5}{2}$, e perciò dopo le necessarie sostituzioni $\int x^{2.\infty}dx(1-x^2)^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{7} \cdot \ldots \frac{2(2.\infty+7)}{(2.\infty)(9)} \cdot \frac{4(2.\infty+9)}{(2.\infty+2)(11)} \cdot \frac{6(2.\infty+11)}{(2.\infty+4)(13)} \cdot \frac{8(2.\infty+13)}{(2.\infty+6)(15)} \cdot$ &c. $= \frac{1.\ 2.\ 4.\ 6.}{7.\ 9\ 11.\ 13.} \frac{8.\ 10.\ldots}{15.17\ldots} = 1.3.5 \left(\frac{1.2.4\ 6\ 8.10\ 12.14.16\ldots}{1.3.5.7.9.11.13.15\ 17\ldots}\right) = 1.3.5\left(\frac{2.\ 4.\ 6\ \ 8.\ 10.\ 12.}{3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13.} \frac{14.\ 16\ldots(2.\infty-2)(2.\infty)}{15.\ 17\ldots(2.\infty-1)\ (2.\infty+1)(2.\infty+3)(2.\infty+5)(2.\infty+7)}\right)$, tenendo conto come si deve (178) della *legge* degli ultimi *termini*. Quindi avviene $2.\infty^3\sqrt{\infty}\int x^{2.\infty}dx(1-x^2)^{\frac{5}{2}} = \frac{1.\ 3.\ 5}{2.\ 2.\ 2}\left(\frac{2.\ 4\ \ 6\ \ 8.\ 10.\ 12.\ 14.\ 16\ldots}{3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13.\ 15.\ 17\ldots} \frac{(2.\infty-2)2\sqrt{\infty}}{(2.\infty-1)}\right) = \frac{1.\ 3.\ 5}{2.\ 2.\ 2}\sqrt{C}$ coerentemente alle superiori dottrine (179).

L'istesso accade sciogliendo la stessa Formola Euleriana (180) ferme

---

(177) Proposizione 45. al §. 364. e pag. 261. del I. Volume *Instit Calc. Integr.*
(178) Consultisi specialmente l'esempio dell'*indice* $\frac{7}{2}$ nel num. 20.
(179) Num. 6. e 17. 18. 20. ed altrove.
(180) *Instit. Calc. Integr. Volumen I.* nello Scolio al §. 374. ed alla pag. 269. Nella Definizione, che siegue (§. 375. e non 475.), v'à per isbaglio tipografico $\int x^{p-1}$

ferme stanti le medesime ipotesi $\int x^{p-1} dx (1-x^n)^{\frac{q-n}{n}}$, quantunque diversamente dall'antecedente siano tutti i *fattori* (181) affetti dall' Infinito. Imperocchè essendo quell'Integrale $= \frac{p+q}{pq} \cdot \frac{n(p+q+n)}{(p+n)(q+n)} \cdot \frac{2n(p+q+2n)}{(p+2n)(q+2n)} \cdot \frac{3n(p+q+3n)}{(p+3n)(q+3n)} \cdot \frac{4n(p+q+4n)}{(p+4n)(q+4n)}$ &c., se facciasi $n=2$, $p=2 \cdot \infty$, $q=1$, onde risulti il caso appreso dagli Euler per il più difficil di tutti, proviene $\int x^{2 \cdot \infty} dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot \infty + 1}{2 \cdot \infty} \cdot \frac{2(2 \cdot \infty + 3)}{3(2 \cdot \infty + 2)} \cdot \frac{4(2 \cdot \infty + 5)}{5(2 \cdot \infty + 4)} \cdot \frac{6(2 \cdot \infty + 7)}{7(2 \cdot \infty + 6)} \cdot \frac{8(2 \cdot \infty + 9)}{9(2 \cdot \infty + 8)}$. &c. $= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdots \frac{(2 \cdot \infty - 2)}{(2 \cdot \infty - 1)}$, ed in conseguenza $2\sqrt{\infty} \int x^{2 \cdot \infty} dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdots \cdots \frac{(2 \cdot \infty - 2)}{(2 \cdot \infty - 1)} \cdot 2\sqrt{\infty} = \sqrt{c}$ come sopra (182). In somma tutto ciò, che

---

$\int x^{p-1} dx (1-x^n)^{\frac{q-1}{n}}$ in vece di $\int x^{p-1} dx (1-x^n)^{\frac{q-1}{n}}$. Parimente nel Tom. III. delle *Mélanges &c.* della R. Società di Torino (*Nota* 69.) a pag. 156. il primo *fattore* $\frac{p+q}{q}$ dev'esser corretto, e posto in suo luogo $\frac{p+q}{pq}$. E' quel *fattore*, di cui scrive l'Euler *cujus quidem Seriei primus factor non legi sequentium adstringitur* (pag. 157.), come in quella di Wallis, nell'altra sin da principio esaminata, ed in moltissime *trascendenti*.

(181) In quella il primo *fattore* è $\frac{1}{k}$ di grandezza *finita* non solo, ma espresso per mezzo d'un *numeratore* e *denominatore finiti*.

(182) Segnatamente abbiasi sempre presente la *Nota* 131. Nè si confonda questo *radicale* $2\sqrt{\infty}$, ultimo *fattor* della Serie, con quello dato da Wallis $\sqrt{1\frac{1}{13}}$, $\sqrt{1\frac{1}{14}}$, &c. (pag. 468. del Tom. I. citato dalla *Nota* 119.); perchè questo, inoltrata all'infinito la Serie, convertesi in $\sqrt{1+\frac{1}{\infty}} = \sqrt{1+0} = 1$, e nulla conclude.

degli Integrali di queste Funzioni *binomie* e del loro sviluppo in *fattori* conoscevasi sino dal tempo di Newton (183) ed Euler potentemente sapeva, era valevole a condurlo alla vera e natural *forma* del *termine generale* della sua Serie, purchè avesse inoltrato sino all' Infinito il suo Calcolo (184), nè gli fosse dispiaciuto di apporre un *modulo* o coefficiente parimente infinito (185). Anzi sono d'avviso che stando ancora al massimo rigor della Formola del Num.17., e vale a dire $2\sqrt{\infty}\int z^{2.\infty+1}dz(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$, senza supporre (com' è) $2.\infty+1=2.\infty$, averebbe potuto l'Euler per mezzo d'altre sue *Tavole* d' Integrali *particolari* (186) arrivare a conoscere il valore del *termine* per il solito *indice* $-\frac{1}{2}$. Difatto $\int x^{2n+1}dx(1-xx)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2.\ 4.}{3.\ 5.}$ $\frac{6.\ 8.\ 10.\ 12.\ldots\ldots 2n}{7.\ 9.\ 11.\ 13.\ldots\ldots(2n+1)}$, e più generalmente $\int x^{2n+1}d\,x(1-xx)^{\frac{n'}{2}}$ $=\frac{1\ .\ 2\ .\ 4\ .\ 6\ .\ 8\ .\ 10\ .\ 12\ .\ \&c.}{(n'+2)\,(n'+4)\,(n'+6)\,(n'+8)\,(n'+10)\,(n'+12)\,(n'+14)\ \&c.}$: che però $2\sqrt{n+1}\int x^{2n+1}(1-xx)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ldots\ldots 2n}{3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13.\ldots(2n+1)}\,2\sqrt{n+1}$, ed il suo *limite* $2\sqrt{\infty+1}\int x^{2.\infty+1}(1-xx)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2.4.6.8.10.12.\ldots\ldots 2.\infty}{3.5.7.9.11.13.\ldots\ldots(2.\infty+1)}$ $2\sqrt{\infty+1}=\sqrt{C}$, poichè $\frac{2.\infty}{2.\infty+1}.\,2\sqrt{\infty+1}=\frac{2.\infty-2}{2.\infty-1}.\,2\sqrt{\infty}$ per la dot-

(183) *De quadratura Curvarum* sino dai primi Teoremi, Mac-Laurin nei luoghi citati dalla *Nota* 151. &c.

(184) Aveva ottenuta la formola diretta $\int\frac{x^{\frac{1}{2}}dx(1-x)^n}{0^{n+1}}$ (vedasi il num. 9, verso la fine), ma non vide come profittare di questa senza cambiarla nell' altra $\int dx(-\mathrm{L}x)^n$.

(185) Aveva ancor egli sott' occhio quel modulo $\frac{1}{0^{n+1}}=\infty^{n+1}$ (*Nota* prec.)

(186) Problema 29. al §. 340. pp. 237. e 238. del Cap. VIII. T. I. *Instit. Calc. Integr.*

dottrina elementare de' *Limiti*. Non diversamente $2(n+1)^{\frac{n'+1}{2}}$

$$\int x^{2n+1}dx\left(1-xx\right)^{\frac{n'}{2}}=\frac{1\;.\;2\;.\;4\;.\;6\;.\;8\;.\;10\;.\;12\;\ldots}{(n'+2)(n'+4)(n'+6)(n'+8)(n'+10)(n'+12)(n'+14)\ldots}$$

$\frac{\ldots(n+1)^{\frac{n'+1}{2}}}{\ldots}\;2\sqrt{n+1}$, e nel *limite* $2\left(\infty+1\right)^{\frac{n'+2}{2}}\int x^{2.\infty+1}dx\left(1-xx\right)^{\frac{n'}{2}}$

$$=\frac{1\;.\;2\;.\;4\;.\;6\;.\;8\;.\;10\;.\;12\ldots(\infty+1)^{\frac{n'+1}{2}}}{(n'+2)(n'+4)(n'+6)(n'+8)(n'+10)(n'+12)(n'+14)\ldots}\ldots$$

$2\sqrt{\infty+1}=\frac{1.\;3.\;5.\;7.\;9.\ldots n'}{2^{\frac{n'+1}{2}}}\cdot\sqrt{c}$, seguitando quell' ordine istesso per i *fattori* del *denominatore*, che abbiamo poco avanti indicato (187). E poi se ben si rifletta, che quell' espressione $\frac{1\;.\;2\;.}{(n'+2)\;(n'+4)}$

$$\frac{4\;.\;6\;.\;8\;.\;10\;.\;12\;\ldots}{(n'+6)(n'+8)(n'+10)(n'+12)(n'+14)\ldots}=\frac{1\;.\;2\;.\;3\;.}{\left(1+\frac{n'}{2}\right)\left(2+\frac{n'}{2}\right)\left(3+\frac{n'}{2}\right)}$$

$\frac{4\;.\;5\;.\;6\;.\;7\;\ldots}{\left(4+\frac{n'}{2}\right)\left(5+\frac{n'}{2}\right)\left(6+\frac{n'}{2}\right)\left(7+\frac{n'}{2}\right)\ldots}$ è la Formola semplificata del *termine generale* sin da principio proposta (188), alla quale ci vediam' ora ricondotti mirabilmente dopo l' esperimento di tanti e sì differenti metodi, tutti insieme concordi.

20. Leonardo Euler intanto non giunse a queste facili conseguenze delle sue Formole universali, quantochè aveva deciso, come osservai nel Num. 9., che fosse sempre $\int x^e dx\left(1-x\right)^n$, o sivvero per la sostituzione pari alla mia (189) altrove usata da lui medesimo (190) $2\int z^{2e+1}dz\left(1-z^2\right)^n$ un Integrale *algebrico*, e perciò in nessun caso dell' esponente *e* intero e *positivo*, e dell' *indice* n, dipendente

(187) Come rilevasi dalla *Nota* 178.
(188) Rileggasi il num 2. sul principio.
(189 L' ò proposta ed effettuata sino dal num. 17.
(190) *Scholion* 2. al §. 335. e pag. 235. T. I. *Inst. Calc. Integr.*

dente dalle *Quadrature* ossia *trascendente* (191). Questo era vero sino a tanto che $e =$ ad un numero finito o assegnabile; ma subito che $e = \infty$, quell' Integrale si fa *trascendente*, ed è perciò d' eccezione alla *regola*, siccome l' istesso Euler à dipoi confermato col fatto proprio, senza però limitare la sua *regola* generalissima (192). Come accada che l' Integrale predetto sia sempre *algebrico* e finito (intendendolo da $x = 0$ sino a $x = 1$ ovvero da $z = 0$ sino a $z = 1$), e quindi si faccia *trascendente* nel solo *limite* di $e = \infty$, e come questo cambiamento improvviso non offenda la *continuità* della Formola, non manca di comparire un *Paradosso* analitico (193). All' effetto di rischiararlo pongo mente che se nella prima espressione l' *indice* n pareggi un numero intero *positivo*, manifesti il Num. 9. essere

$$\int x^e dx(1-x)^n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots\ldots (n-1)(n)}{(e+1)(e+2)(e+3)(e+4)(e+5)(e+6)\ldots\ldots(e+n)(e+n+1)},$$

ed in conseguenza sempre finito tutte le volte che tale sia l' esponente e. Scema continuamente questo valore (o Integrale *algebrico*) crescendo e, e tanto più scema il primo, quanto più cresce l'altro; dimodochè senza niun salto, è conservata sempre l' istessa *forma* della Funzione; finalmente diventi inassegnabile, perchè infinitamente piccolo del grado $n+1$ appena $e = \infty$, cambiandosi allora in $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots\ldots n}{\infty^{n+1}}$ per gli argumenti più volte esposti di sopra. Mentre poi l' indice $n = \frac{n'}{2}$, non à dubbio che $2\int z^{2 \cdot e+1} dz(1-z^2)^{\frac{n'}{2}}$ essendo e eguale a qualunque numero intero *positivo*, dia sempre un Integrale *algebrico* nel caso di $z = 1$, ma decrescente crescendo l' *esponente* e. Per esempio da ciò, che ò mostrato verso la fine del Numero

(191) Si legga il passo trascritto al num. 9. *Hìc observandum &c.*

(192) Altro passo nell' istesso num. 9. *Ubi si fractio &c.* E difatti $f:g$ è della classe delle ragioni *moltiplici* quando diventi $1:0$ ossia *infinitecupla*. Dunque questo caso doveva eccettuarsi rispetto alla Formola $\left(\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\right)\int x^{\frac{f}{g}} dx(1-x)^n$ $= \infty^{n+1}\int x^{\infty} dx(1-x)^n$ mentre $f = 1$, $g = 0$ (§. 10. a pag. 42. del Tom. V. di Pietroburgo) come in sostanza à poi fatto (num. 9.) senza indicar l' eccezione di quel *canone* generale.

(193) Sò bene che M. D'Alembert à pubblicati dei dubbj contro di questa legge della *continuità* (vedasi la *Nota* (32) della mia *Exercitatio Mathematica &c.*). Può servire di qualche risposta tuttociò che osservai sopra di questo importante argumento geometrico-analitico nel Capitolo IX. dell'altra mia Opera *Magnitudinum Exponentialium &c.*

mero antecedente, $2\int z^{2.e+1}dz(1-z^2)^{\frac{5}{2}} = \frac{1.\ 2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10.12.\ 14......}{7.\ 9.\ 11.\ 13.15.\ 17.19.21.....}\frac{2e}{(2e+7)}$: questo valore semprepiù si fa piccolo, quanto il numero dei *fattori* si aumenta, il qual numero aumentandosi all' infinito quando $e = \infty$, è forza che allora diventi infinitesima ed inassegnabile quella *frazione*, e precisamente del grado $\frac{1}{\infty\sqrt[3]{\infty}}$ in virtù delle ragioni accennate (194). L' istesso si dica d' ogni altra espressione particolare compresa nell' *ecumenica* $2\int z^{2e+1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{n'}{2}}$ come quella, di cui conoschiamo l' universale sviluppo nei suoi *fattori* (195). E' sempre *algebrico* e finito, ma sempre decrescente crescendo e il di lei valore; è infinitesimo dell' ordine $0^{\frac{n'+1}{2}}$ quando $e = \infty$, cioè quando il valore risulta da *fattori* innumerevoli; ed è appunto per questo motivo che allora facciasi *trascendente*, perocchè l'*Algebra* insegna (196) essere *trascendenti* le Quantità tutte, che non si possano esprimere con altro mezzo eccettochè colle Serie infinite. E difatto quando $e = \infty$, abbiamo $2\int z^{2.\infty+1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{n'}{2}}$

$$= \frac{1.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.....n'.\sqrt{c}}{2^{\frac{n'+1}{2}}\ \infty^{\frac{n'}{2}+1}}$$

. Anzi con tutta chiarezza adesso s' intende perchè sia necessario il *modulo* o coefficiente ∞^{n+1}, ossia nel caso dell' *indice* frazionario $\frac{n'}{2}$ l' altro $\infty^{\frac{n'}{2}+1}$ che torna l'istesso (197), a fine di rendere l' espressione $\int x^e dx\left(1-x\right)^n$, o respettivamente

$2\int z$

(194) Ecco di nuovo (*Nota* 63) degli Infinitesimi ed Infiniti *comparabili* tra di loro, e non vaghi, ma determinati in tutte le parti.

(195) *Tavole* Euleriane citate dalla Nota (186).

(196) Alla pag. VIII. della Prefazione *Introd. in Anal. Infinit.* parlando delle Quantità *trascendenti* à scritto l'incomparabile Autore..... *hæ vero vel per alias rationes componuntur*, *vel ex iisdem operationibus* Algebræ *infinities repetitis efficiuntur.*

(197) Poichè $\frac{n'}{2} = n$ generalmente considerato per *indice* della Serie.

$2\int z^{2e+1} dz (1-z^2)^{\frac{n'}{2}}$ utile alla Serie proposta, e non altrimenti *infinitesima*, ma significativa d'una grandezza *finita*. Alla Funzione canonica $2\int z^{2e+1} dz (1-z^2)^{\frac{n'}{2}}$ si riduce quell' espressione Euleriana $\sqrt{1.\,2.\,3.\,4.\ldots.\,n'.\,n'+1\,.\int dx(x-xx)^{\frac{n'}{2}}}$, che presa in ajuto un' altra Serie, e con metodo assai più lungo del mio (198) assegnò il Ch. Autore per la ricerca di tutti i *termini* corrispondenti ad *indici* rotti, ma sempre *denominati* dal 2 (199). Così per esempio posto $n'=5$, e sapendosi che $\int dx(x-xx)^{\frac{5}{2}} = \int dx\frac{(x-xx)^3}{\sqrt{x-xx}} = \int\frac{x^3 dx}{\sqrt{x-xx}} - 3\int\frac{x^4 dx}{\sqrt{x-xx}} + 3\int\frac{x^5 dx}{\sqrt{x-xx}} - \int\frac{x^6 dx}{\sqrt{x-xx}} = C\left(\frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6.} - 3.\frac{1.\,3.\,5.\,7.}{2.\,4.\,6.\,8.}\ldots\ldots + 3\frac{1.\,3.\,5.\,7.\,9}{2.\,4.\,6.\,8.\,10.} - \frac{1.\,3.\,5.\,7\,9.\,11}{2.\,4.\,6.\,8.\,10.\,12}\right)$ nel caso di $x=1$ per le regole note (200) $= C\left(\frac{225}{2.\,4.\,6.\,8.\,10.\,12}\right) = \frac{1.3.5.1.\,3.\,5}{2.4.6\,8.10.12}.\,C$, verrà ad essere il *termine* ricercato eguale a $\sqrt{\frac{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,(1.\,3.\,5)(1.\,3.\,5)}{2.\,4.\,6.\,8.10.12.}.\,C} = \frac{1.3\,5}{2.2.2}\sqrt{C}$, non diversamente da ciò, che colla massima facilità è stato veduto di sopra. In complesso [siccome à suggerito prima di compilar la sua *Tavola* l' istesso Euler (201)] dall' ultima espressione essendo agevole il passaggio all' altra contemplata superiormente col sostituire $z^2=x$ nella medesima ipotesi dell' Integrale condotto sino al valore di $z=1$, sarà fuori di dubbio la coincidenza della Formola Euleriana con quella somministrata dalla Funzione, che rappresenta

(198) A questo proposito si vedano i luoghi citati dal num. 11.

(199) Egli chiamò p ciò, ch' io quì nomino n'. *Hoc igitur modo inveniuntur omnes termini Progressionis* 1, 2, 6, 24, *&c.*, *quorum indices sunt fractiones denominatore existente* 2. (T. V. di Pietroburgo § 22. a pag. 52.). Poi scende a trattare degli *indici* $\frac{p}{3}$, $\frac{p}{4}$, &c., $\frac{p}{q}$ nei seguenti §§.

(200) *Scholion* 2. accennato dalla *Nota* 190. colle sue *Tavole*.

(201) *Nota* medesima 190.

ta il *termine generale* nel modo più semplice, col quale l' ò esposto. Imperciocchè $\sqrt{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ldots\ldots n'\,(n'+1)\int dx\left(x-xx\right)^{\frac{n'}{2}}}\ \ldots\ldots\ldots$ $=\sqrt{1.2.3.4.5.6\ldots\ldots n'(n'+1)\,2\int z^{n'+1}dz\left(1-z^2\right)^{\frac{n'}{2}}}$; laonde il *termine* corrispondente all'*indice* $\frac{n'}{2}$ si fa $=\sqrt{1.2.3.4.5.6.7.8.9\ldots\ldots n'(n'+1)\,2.\ \frac{1}{(n'+3)}\cdot\frac{3\ \cdot\ 5\ \cdot\ 7\ \cdot\ 9\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (n'+3)(n'+5)(n'+7)(n'+9)(n'+11)\ldots\ldots}{(n'+5)(n'+7)(n'+9)(n'+11)\ldots\ldots(n'+n'+2)\ \ 2\ \cdot\ 4\ \cdot\ 6\ \cdot\ 8\ \cdot\ 10\ \cdot}\cdot\frac{(n'+n')C}{(n'-1)\,2^{n'+1}}} = \frac{1.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9\ldots\ldots n'}{2^{\frac{n'+1}{2}}}\ .\ \sqrt{C}$, come apparisce studiando la *legge* di continuazione o progresso della *Tavola* d'Euler (202). Chiunque paragonerà queste Formole, che assegnano i *termini intercalati* della Serie Euleriana dipendenti dalle *Quadrature*, con quelle che ò immaginate e dedotte negli Articoli precedenti, dovrà confessare che l'ultime per la loro naturalezza e semplicità discuoprano subito quanto più facilmente vi conducessero i metodi somministrati da Newton; cosicchè quest' Uomo immortale avesse molta ragione di lasciar scritto *Ex his principiis via sternitur ad majora* (203).

RILIEVI,

AGGIUNTE, CONSEGUENZE, ED APPLICAZIONI

Delle Dottrine spiegate.

§. III.

23. SOno costretto dall' abbondanza della materia di limitarmi piuttosto a dei saggi che a delle specolazioni complete. Alcune non sarann'altro che dei pensieri abbozzati, ed oltre a mancarle quel finimento, che meritano, avranno forse qualche fallacia na-

(202) Per le fatte supposizioni essendo n' numero intero *dispàri*, $n'+1$ è *pari*, ed $(n'+1)\,2=n'+(n'+2)=2n'+2$. Le *Tavole* sono quelle rammentate dalla *Nota* 157, ma nella Colonna delle *potenze* pari della variabile x.

(203) Ultime parole del suo Trattato *De Quadratura Curvarum*. (Vedasi la pag. 244. del I. Volume degli *Opuscoli*, di cui parlano le *Note* 8. 9. e 16.).

nascosta. I Matematici tanto più grandi di me, che onorano oggigiorno l'Europa, vedranno subito dove possan esser manchevoli le mie deduzioni: gli altri facendo sperimento e sviluppo delle mie Formole coglieranno dai semi, ch'io getto, quel frutto, che non sono adesso in istato di aver maturo e perfetto. Primieramente mi pongo a considerare una bellissima analogia tra la Serie esaminata sino ad ora e quella famosa di Wallis, che mostra sempre delle nuove eleganze a proporzione che più si rifletta sulla medesima. Leonardo Euler (204) trovò facilmente che il *termine* dell' ultima Serie $\frac{2}{3} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} +$ &c. corrispondente all'*indice n* era $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \ldots\ldots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \ldots\ldots 2n+1}$, e sin quì non fece un passo di più del Matematico Inglese (205). Wallis *interpolò* la sua Serie per gli *indici* $\frac{n'}{2}$, compresovi acora $-\frac{1}{2}$, che fu il primo esempio degli *indici* negativi avanti di quello degli Euler (206); ma Euler seniore andò ancora più lungi con assegnare il *termine generale* espresso così $\frac{2n+3}{2}\int dx(1-x)^n \sqrt{x}$, posto $x=1$, il quale a differenza dell'altro, di cui parlano i Numeri 11. e 22., somministra il *terne* relativo al predetto *indice* $-\frac{1}{2}$ come quello che allora convertasi in $\frac{-1+3}{2}\int \frac{dx \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-xx}} = \frac{C}{2} = 2A$, ch' è appunto il valore medesimo Wallisiano secondochè vedremo in appresso (207). Potrò

(204) Tomo V. dell'Accademia di Pietroburgo tra i primi alla pag. 42. § 11.

(205) Difatto questi considerando la Serie inversa espresse il *termine generale* così $1 \times \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \&c.}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \&c.}$. (Si veda l'*Arithmetica Infinitorum* nello *Scolio* della Proposizione CLXVII. o la pag. 441. del I. Volume della *Raccolta* di tutte le Opere &c).

(206) Nell'*Arithmetica* precitata osservisi la *Tavola* della Proposizione CLXXXIX. alla terza linea, dov'è il termine $\frac{1}{2}$ [□].

(207) Wallis nel luogo poc'anzi accennato espone il termine della Serie inversa per mezzo di $\frac{1}{2}$ [□]. Ma [□] secondo lui è $\frac{1}{A}$ (ved. alle pag. 439. e 469.). Dunque $\frac{1}{2}$ [□] $= \frac{1}{2A}$, e roversciando 2A.

Potrò io nel paragone delle due Serie aggiunger cosa di qualche momento a dei ritrovati così sublimi? Ecco in breve il Prospetto, che sottopongo agli occhi degli Analisti (208).

Serie di Wallis.	*Serie dell' Euler.*
Termine generale per l' indice n intero positivo	Termine generale per l' indine n intero positivo
$\frac{1.}{\frac{3}{2}}\ \frac{2.}{\frac{5}{2}}\ \frac{3.}{\frac{7}{2}}\ \frac{4.}{\frac{9}{2}}\ \frac{5.}{\frac{11}{2}}\ \frac{6.}{\frac{13}{2}}\ \frac{7.}{\frac{15}{2}} \ldots\ldots \frac{n}{\frac{2n+1}{2}}$	$1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7. \ldots\ldots n$
Termine per l' indice $\frac{n'}{2}$ posto n' dispàri positivo	Termine per l' indice $\frac{n'}{2}$ posto n', dispàri positivo
$\frac{1.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13.\ 15.\ldots.n'}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 14.\ 16.\ldots.n'+1} . \frac{C}{2}$	$\frac{1.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13.\ 15.\ldots.n'}{2.\ 2.\ 2.\ 2.\ 2.\ 2.\ 2.\ 2.\ldots.2} . \sqrt{C}$
Termine per l'indice $-\frac{1}{2}$ eguale a $\frac{C}{2}$	Termine per l'indice $-\frac{1}{2}$ eguale a $\sqrt{C}$
Termine per l' indice $o=1$.	Termine per l' indice $o=1$.

Combinano adunque queste due Serie per l' *indice* o. In proposito degli indici interi e *positivi* i *numeratori* combinano, non meno che i *numeratori* dei Coefficienti della Funzione del Circolo per gli *indici* $\frac{n'}{2}$. Il *termine* della Serie Euleriana per l' *indice* n diviso per il doppio del Coefficiente della Funzione del Circolo nel *termine* della medesima Serie corrispondente all' *indice* $\frac{n'}{2}$ rende appunto il *termine generale* della Serie di Wallis per l' *indice* n, che sebbene esposto da me in un modo diverso da quello del Geometra Ingle-

(208) Pietro Mengoli nel suo *Circolo* (ediz. di Bologna del 1672.) senza nessun bisogno del lunghissimo giro delle Proposizioni moltiplici e dell' *interpolazione* usata dal Wallis dimostrò direttamente e colla massima facilità i due *limiti* di questa Serie rappresentante l' Area del Circolo, posto 1 il Quadràto circoscritto. Di quell'Opera piuttosto rara, e poco o punto conosciuta dai Matematici Oltramontani, ò parlato nella *Nota* 25. al Discorso proemiale della mia *Exercitatio mathematica &c.* altrove citata. (Si veda alla pag. 223.).

glese, pure concorda interamente col suo (209), essendo evidente

l'egualità $\frac{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 14 \ldots\ldots 2n}{3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13.\ 15 \ldots\ldots 2n+1} = \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7 \ldots\ldots n}{\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}.\frac{9}{2}.\frac{11}{2}.\frac{13}{2}.\frac{15}{2} \ldots \frac{2n+1}{2}}$,

Nel tempo che il *termine* per l'*indice* $\frac{n'}{2}$ della Serie Euleriana à il suo *denominatore* formato dal prodotto della replica del *binario*, e vale a dire dei termini della Progressione aritmetica, dei quali il primo sia 2, e la differenza o (210), così il *termine* per l'istess' *indice* $\frac{n'}{2}$ della Serie Wallisiana à il suo *denominatore* composto del prodotto dei termini della Progressione aritmetica, di cui sia primo termine 2, e 2 parimente la differenza. Di più il *termine* della Serie dell' Euler per l'*indice* n è l'istesso di quello per l'*indice* $\frac{n'}{2}$ della Serie di Wallis, tranne la Funzione del Circolo, e scrivendo nell' ordine *naturale* numerico tutte le cifre o elementi, i quali compongono tanto il *numeratore*, quanto il *denominatore* del medesimo *termine*. Finalmente nel modo istesso che retrocedendo dall' indice $\frac{1}{2}$ all'altro $-\frac{1}{2}$ nella Serie Euleriana non si fa che raddoppiare il *termine* $\frac{1}{2}.\sqrt{C}$, cosicchè venga ad essere $=\sqrt{C}$ per la dottrina spiegata (211), ancora il *termine* della Wallisiana corrispondente all' *indice* $-\frac{1}{2}$ si ottiene raddoppiando quello $\frac{1}{2}.\frac{C}{2}=\frac{C}{4}$, che appartiene all' *indice* $\frac{1}{2}$, onde diventi $\frac{C}{2}$. Tanti rapporti di analogia di queste due Serie, uniti all'altro che i loro *termini intercalati* a distanze eguali tra i corrispondenti agli *indici* interi dipendano in ambedue dalla *Quadratura* del Cerchio, rendono assai manifesto per qual motivo analitico abbia incontrata Leonardo Euler una fratellanza sì stretta con altra delle medesime Serie sino al segno di risolvere e spiegare la seconda per mezzo della prima, siccome ò già detto (212). Resta unicamente da vedere in qual maniera, sen-

(209) Luogo citato nella *Nota* 205.

(210) Wallis averebbe chiamata questa Progressione col nome di *Series æqualium*, e nascerebbe da $1 \times \frac{2}{1}.\frac{4}{2}.\frac{6}{3}.\frac{8}{4}.\frac{10}{5}.\frac{12}{6}.\frac{14}{7}$ &c.

(211) Si consultino i numeri 6. 14. e 17.

(212) Nel num. 11.

senza servirmi del lungo metodo d'*interpolazione* adoprato dal Wallis per arrivare a scuoprire i *termini* attenenti agli *indici* $\frac{n'}{2}$ più quello dell' *indice* $-\frac{1}{2}$ come si rilevano dalla breve *Tavola* descritta nella Proposizione CLXXXIX. della sua *Aritmetica degli Infiniti*, io sia giunto a stabilire la forma del *termine generale* $\frac{1.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13.\ 15 \ldots\ldots\ n'}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 14.\ 16 \ldots\ldots\ n'+1} \cdot \frac{C}{2}$ non assegnata da Wallis (213), non meno che $\frac{C}{2}$ rapporto all' indice $-\frac{1}{2}$. Il metodo, che ò tenuto, si appoggia in parte a quello, del quale ò fatt' uso sino dal Num. 6., ed in altra parte a ciò ch' io chiamo *la circolazione delle Serie* (214) ossia la loro prosecuzione di là dall' Infinito, onde in guisa d'anello vengano a ricongiungere il punto, da cui sono partite, e quindi da capo proseguano facendo altri passi, ma sempre coll' osservanza della medesima *legge* (215). Questo artifizio, che mi sembra nuovo per quanto io sappia, mirabilmente riesce nella Serie di Wallis: altri lo sperimentino in altre Serie. Suppongo prima di tutto che sia quistione del *termine* per l' *indice* $\frac{1}{2}$, e vedo che il *termine generale* per gli *indici* interi e *positivi*, principiando da 1, egli è $\frac{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12 \ldots\ldots\ 2n}{3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13 \ldots\ 2n+1}$: laonde se si continui all' infinito, e dipoi *circolando* si torni all' indietro, e si faccia un passo di più all'effetto d'andare in traccia dell' *indice* $\frac{1}{2}$, acquista la *forma* di $\frac{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12 \ldots\ldots\ \infty.\infty \ldots\ldots\ 12.\ 10.\ 8.\ 6.\ 4.\ 2.\ 1}{3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13 \ldots\ldots\ \infty+1.\infty+1 \ldots\ 13.\ 11.\ 9.\ 7.\ 5.\ 3.\ 2}$,

 e per-

(213) Egli notò nella *Tavola*, di cui parla la *Nota* 206, questi *termini* soli (intendendo degli *indici positivi* $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$), cioè $1.\ \frac{C}{4}, \frac{3}{4}.\ \frac{C}{4}, \frac{5}{8}.\ \frac{C}{4}, \frac{35}{64}.\ \frac{C}{4}$, (vedansi le *Note* 206. e 207.) senza indicarne la *legge*, nè il modo di continuare la Serie.

(214) E' però ben diversa una Serie simile *circolante* da quelle Serie *periodiche* di *frazioni*, considerate sotto di questo nome da Robertson (*Philosophical Transactions* Tom. LVIII. per l'anno 1768. al Num. XXXII. da pag. 207. alla 214. *Of the Theory of circulating Decimal Fractions = By John Robertson =*), e quindi nel Volume II. per l'anno 1771. delle *Nouveaux Mémoires* della R. Accademia di Berlino [*Sur les Fractions dêcimales périodiques* (*ou circulantes*) dalla pag. 273. alla 305.) da Giovanni Bernoulli l'juniore.

(215) Seguitando il costume d' Archimede e di Ludolfo da Ceulen, e di Jacopo Bernoulli, sarebbe questo il Simbolo dell' *Eternità*.

e perciò eguaglia $2 . \frac{1}{2}\left(\frac{2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.12\ldots}{3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.13\ldots}\right) = \frac{2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.12\ldots}{3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.13\ldots}$, ch' è appunto l' espressione trovata da Wallis (216) in numeri per l' Area del Circolo o per $\frac{C}{4}$, di cui sia 1 il diametro. Vado più avanti in cerca de' *termini*, che si riferiscano agli *indici* $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$, &c., e trovo coll' istesso principio della *circolazione* per l' *indice* $\frac{3}{2}$ la Serie seguente $\frac{2.4.6.8.10.12\ldots\ldots\infty.\infty\ldots\ldots12.10.8.6.4.2.1.3}{3.5.7.9.11.13\ldots\ldots\infty+1.\infty+1\ldots13.11.9.7.5.3.2.4} = 2 . \frac{1}{2} . \frac{3}{4}\left(\frac{2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.12\ldots}{3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.13\ldots}\right) = \frac{3}{4} . \frac{C}{4}$; per l' *indice* $\frac{5}{2}$ l' istesso metodo mi suggerisce qual termine della Serie $\frac{2.4.6.8.10.12\ldots\ldots\infty.\infty\ldots\ldots12.10.8.6.4.2.1.3.5}{3.5.7.9.11.13\ldots\ldots\infty+1.\infty+1\ldots13.11.9.7.5.3.2.4.6} = 2 . \frac{1}{2} . \frac{3}{4} . \frac{5}{6}\left(\frac{2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.12\ldots}{3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.13\ldots}\right) = \frac{3}{4} . \frac{5}{6} . \frac{C}{4}$; per l' *indice* $\frac{7}{2}$ mi viene il *termine* della medesima Serie $\frac{2.4.6.8.10.12\ldots\ldots\infty.\infty\ldots\ldots12.10.8.6.4.2.1.3.5.7}{3.5.7.9.11.13\ldots\ldots\infty+1.\infty+1\ldots13.11.9.7.5.3.2.4.6.8} = 2 . \frac{1}{2} . \frac{3}{4} . \frac{5}{6} . \frac{7}{8}\left(\frac{2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.12\ldots}{3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.13\ldots}\right) = \frac{3}{4} . \frac{5}{6} . \frac{7}{8} . \frac{C}{4}$, e così discorrendo degli altri, con fare un passo di più ad ogni *indice* nuovo, e tener ferma la *legge* che i numeri omologhi del *denominatore* nella Serie *circolata* superin quelli del *numeratore* di un' *unità*. Corrispondono perfettamente i *termini* rintracciati $\frac{C}{4}, \frac{3}{4} . \frac{C}{4}, \frac{5}{8} . \frac{C}{4}, \frac{35}{64} . \frac{C}{4}$, &c. a quelli del Wal-

(216) Si leggano le *Note* (131) e (208).

Wallis (217), e scrivendogli nel modo seguente $\frac{1}{2}.\frac{C}{2}$, $\frac{1.3}{2.4}.\frac{C}{2}$, $\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{C}{2}$, $\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{C}{2}$, &c. somministrano allora per qualunque *indice* $\frac{n'}{2}$ la *legge* e la *forma* accennate di sopra. E siccome questa *legge* dei loro valori non cambia facendo un passo all'indietro di più, cioè scrivendo quei *termini* così $\frac{1.1}{1.2}.\frac{C}{2}$, $\frac{1.1.3}{1.2.4}.\frac{C}{2}$, $\frac{1.1.3.5}{1.2.4.6}.\frac{C}{2}$, $\frac{1.1.3.5.7}{1.2.4.6.8}.\frac{C}{2}$, &c., viene ancora a scuoprirsi il *termine* dell'*indice* $-\frac{1}{2}$, cioè $\frac{1}{1}.\frac{C}{2}=\frac{C}{2}=\frac{2C}{4}=2A$ a tenore della *Tavola* rammentata del Wallis (218). Difatto non accade diversamente della Serie Euleriana: perocchè in virtù dei Num. 6. 20. e 21. sono i termini corrispondenti agli *indici* $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, &c. eguali a $\frac{1}{2}.\sqrt{C}$, $\frac{1.3}{2.2}.\sqrt{C}$, $\frac{1.3.5}{2.2.2}\sqrt{C}$, $\frac{1.3.5.7}{2.2.2.2}.\sqrt{C}$, &c., o sivvero $\frac{1.1}{1.2}\sqrt{C}$, $\frac{1.1.3}{1.2.2}.\sqrt{C}$, $\frac{1.1.3.5}{1.2.2.2}.\sqrt{C}$, $\frac{1.1.3.5.7}{1.2.2.2.2}.\sqrt{C}$, &c. laonde il *termine* relativo all'*indice* $-\frac{1}{2}$ viene ancor quì per lo stesso metodo di ricerca ad essere $\frac{1}{1}.\sqrt{C}=\sqrt{C}$, come d'altronde sappiamo. Questo è un'altro punto d'analogia sommamente elegante tra le due Serie. Giova adesso di aggiungere che il *termine* della Serie di Wallis per l' *indice* ∞ (inteso per questo segno rappresentarsi l'Infinito *ordinario* $\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}$) essendo $\frac{2.\,4.\,6.\,8.\,10.\,12.\,14.\,16.\,18\ldots(2.\infty-2).\,2.\infty}{3.\,5.\,7.\,9.\,11.\,13.\,15.\,17.\,19\ldots(2.\infty-1)(2.\infty+1)}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{C}{\infty}}$, sia un Infinitesimo del grado $\sqrt{\overline{0}}$, dipendente dalla *Quadratura* del Circolo (219), quando l' indole della *frazione* non farebb' altro colle sole *leggi*

(217) Passo citato nella *Nota* 213.

(218) Vedasi la *Nota* 207.

(219) Poichè essendo $\frac{2.\infty}{2.\infty+1}=1$, si fa questa Serie eguale all'altra $\frac{2.\,4.\,6.\,8.\,10.\,12.\,14.\,16.\,18\ldots(2.\infty-2)}{3.\,5.\,7.\,9.\,11.\,13.\,15.\,17.\,19\ldots(2.\infty-1)}$, cioè $=\frac{1}{2\sqrt{\infty}}\left(\frac{2.\,4.\,6.\,8.\,10.\,12.\,14.\,16.\,18\ldots(2.\infty-2)\,2\sqrt{\infty}}{3.\,5.\,7.\,9.\,11.\,13.\,15.\,17.\,19\ldots(2.\infty-1)}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\infty}}.\sqrt{\frac{C}{4}}$.

leggi dell' Aritmetica che presentare un Infinitamente-piccolo vago ed indeterminato. Ecco dove comparisce nella Serie del Wallis quell' istessa Funzione del Circolo $\sqrt{C}$, che fa tanta figura in quella dell' Euler; cosicchè debba dirsi che l'ultimo *termine* della Wallisiana $\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{\infty}}$ sia al *termine* dell' *indice* $\frac{1}{2}$ dell' Euleriana $\frac{1}{2}\sqrt{C}$ come $1 : 2\sqrt{\infty}$. Inoltre nella Serie istessa di Wallis abbiamo per gli *indici* $0, \frac{1}{2}, \infty$ i *termini* $1, \frac{C}{4}, \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{C}}{2\sqrt{\infty}}$, o piuttosto $1, A, \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{\infty}}$; dimanierataleche [tranne il modulo $2\sqrt{\infty}$] come gli *indici* $0, \frac{1}{2}, \infty$ sono in continua Proporzione geometrica in forza della Serie *parallela* del Grandi (220), non altrimenti lo siano i *termini* che gli appartengono [sebbene in ordine inverso] $1, \sqrt{A}, A$. Di più .... Ma io non la finirei mai se tutti qui pretendessi raccogliere i punti di convenienza ed i rapporti insigni, che hanno tra loro le meditate due Serie.

24. Quanto era difficultoso ed indiretto il modo d' esprimere mediante le *Quadrature* i *termini* da intercalare per gli *indici* $\frac{n''}{3}, \frac{n'''}{4}, \frac{n^{iv}}{5}, \frac{n^{v}}{6}, \frac{n^{vi}}{7}$, &c. discoperto dall' Euler per la sua Serie (221), altrettanto facilmente gli somministra ridotti in delle Serie infinite il mio *termine generale* $\infty^{n+1}\int x^{\infty}\,dx(1-x)^{n}$. Anzi paragonato questo con quello dell' Euler, e coll' altro composto d' infiniti *fattori*, e spiegato nel Num. 2, arricchisce agevolmente l' Analisi con delle nuove Serie infinite (222). Prendiamo per esempio l' *indice* $\frac{1}{3}$. Dunque otterremo in virtù dei soliti Teoremi di Newton

(220) *Nota* 82. Merita a questo proposito d'esser letta e ponderata l'egregia *Dissertazione* dell' Euler accennata nella *Nota* 48, e principalmente al §. 2. pag. 84. *Mais j' ai déjà remarqué dans une autre occasion, qu'il faut donner au mot de* Somme *une signification plus étendue, & entendre par là une fraction, ou autre expression analytique, la quelle étant développée selon les principes de l'analyse produise la même Série dont on cherche la Somme*, col rimanente che siegue. Si veda inoltre l' eccellente *Memoria* del medesimo Autore *De Seriebus divergentibus* nel Tom. V. de' *Commentarj nuovi* di Pietroburgo (da pag. 205. a 238.) per gli anni 1754. e 55. pubblicato del 1760.

(221) Luogo citato dalla *Nota* 106.

(222) Non intendo però di toglier nulla al merito sommo del Capitolo IX. (*De evolutione Integralium per producta infinita*) della Sezione I. del Tomo I. delle *Istituzioni* di Calcolo Integrale, non meno che della *Dissertazione* citata dalle *Note* 48. e 69, le quali produzioni eccellenti s'occupano dell'istesso argumento ivi profondamente trattato dall'Euler.

Newton (223) $\infty \sqrt[3]{\infty} \int x^{\infty} dx(1-x)^{\frac{1}{3}} = \frac{3.\ 6.\ 9.\ 12.\ 15.\ 18.\ 21. \ldots 3n \ldots}{4.\ 7.\ 10.\ 13.\ 16.\ 19.\ 22. \ldots (3n+1) \ldots}$

$\frac{3.\infty}{(3.\infty+1)(3.\infty+4)} . 3.\infty \sqrt[3]{\infty}$, perchè $\int x^{\infty} dx(1-x)^{\frac{1}{3}} : \int dx(1-x)^{\frac{1}{3}}$ [cioè $\frac{3}{4}$, contando come devesi l'Integrale da $x=0$ sino a $x=1$] . . . .

$:: \frac{3.\ 6.\ 9.\ 12.\ 15.\ 18.\ 21. \ldots 3n \ldots 3.\infty}{7.\ 10.\ 13.\ 16.\ 19.\ 22.\ 25. \ldots (3n+4) \ldots (3\infty+4)} : 1$. L'istesso rilevasi in conferma di ciò dal *termine generale* del Num. 2. come quello, che somministra per il caso di $n=\frac{1}{3}$ della presente ipotesi . . . .

$$\frac{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ .\ 6\ .\ 7 \ldots\ldots n \ldots\ldots \infty}{\frac{4}{3}.\frac{7}{3}.\frac{10}{3}.\frac{13}{3}.\frac{16}{3}.\frac{19}{3}.\frac{22}{3}\ldots\frac{(3n+1)}{3}\ldots\frac{(3.\infty+1)}{3}} = \left(\frac{3.\ 6.\ 9.\ 12.\ 15.\ 18.\ 21. \ldots 3n \ldots 3.\infty}{4.\ 7.\ 10.\ 13.\ 16.\ 19.\ 22. \ldots (3n+1) \ldots (3.\infty+1)}\right) . \sqrt[3]{\infty}$$

egualmente che sopra, e per i motivi addotti nell'altro *caso* dell'*indice* $n=-\frac{1}{2}$ verso la fine del Num. 5. A tenore perciò della Serie di Wallis si può scrivere questa nuova Serie nel modo, che siegue, $\frac{3}{4}.\frac{6}{7}.\frac{9}{10}.\frac{12}{13}.\frac{15}{16}.\frac{18}{19}.\frac{21}{22}\ldots$

$\ldots \frac{3n}{3n+1} . \sqrt[3]{n}$ qualora si volesse fermare la Serie al *termine* dell' *indice* n onde averne per approssimazione il valore. Egli è certo che senza il *modulo* aggiunto $\infty \sqrt[3]{\infty}$ l'Integrale $\int x^{\infty} dx(1-x)^{\frac{1}{3}}$ sarebbe un infinitamente piccolo dell' ordine $\frac{1}{\infty^{\frac{4}{3}}} = 0^{\frac{4}{3}}$; ed è manifesto egualmente che quella Serie composta d'infiniti *fattori* e corredata del suo *modulo* rappresenta $\sqrt[3]{2\int dx(x-xx)^{\frac{1}{3}} . \int dx(x^2-x^3)^{\frac{1}{3}}}$, e vale a dire si riduce alla *Quadratura* di Linee del 3.° grado (224), e segnatamente secondo la numerazione Newtoniana (225) alla *Quadratura*

(223) Mac-Laurin nel luogo citato dalla *Nota* 139.

(224) Si consulti il §. 22. alla pag. 52. del Tom. V. citato dalla *Nota* 106..... *terminus ordine* $\frac{p}{3}$ &c.

(225) *Isaaci Newtoni Equitis Aurati &c. Opusculorum Tomus primus &c.* = *Lausannæ & Genevæ* 1744. = Opusc. IV. *Enumeratio Linearum tertii ordinis edita Londini* 1706. e pag. 258. e 264. e *Tavole* VIII. XI.

dratura della Parabola *pura Companiforme* della *Specie* LXXI. e Fig. 79, ed alla *Quadratura* d' una delle sei Iperbole *difettive senza diametro* assomigliantesi a quella della *specie* XXXV. e Fig. 45, siccome è facile di ravvisare. Alcune osservazioni notabili vengono suggerite dalle ricerche premesse. Primieramente è degno di riflessione come il *termine* della Serie per l'*indice* $\frac{1}{3}$ si risolva nella *radice cuba* d' una Quantità *trascendente*, quando quello per l'*indice* $\frac{1}{2}$ si risolveva nella *radice quadrata*; e questa *legge* à luogo generalmente per gli altri *indici* $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ &c. Oltredició come all'*indice* $\frac{1}{2}$ corrispondeva tra le Quantità *trascendenti* l'Area del Circolo, non manca d'esser mirabile che il *termine* dell'*indice* $\frac{1}{3}$ comprenda tra le Quantità *trascendenti*, da cui dipende, l'Area d'un Circolo di second' ordine, qual' è quello distinto dall' Equazione $y^3 = (x^2 - x^3) = x^2(1-x)$ secondo le definizioni adottate dai Matematici (226). In terzo luogo si manifesta come per mezzo d' una Serie infinita abbiasi il valore di

$$\int dx\left(x-xx\right)^{\frac{1}{3}}.\int dx\left(x^2-x^3\right)^{\frac{1}{3}},$$ limitando l' Integrale da $x=0$ sino a $x=1$,

in aumento d'altri prodotti di Quantità *trascendenti* di simil *forma* risoluti così dal grand' Euler (227). Lo che è tantopiù valutabile, quantochè il primo degli Integrali si ottenga mediante la rettificazione delle Coniche Curve (228). Finalmente ognun vede che senza la giunta del *modulo* quella Serie composta d' infiniti *fattori* non avrebbe mai valore *finito*, non diversamente da ciò che abbiamo veduto della Wallisiana (229) parlando dell' *indice* $\frac{1}{2}$. Ricorrerebbero presso a poco le istesse massime per tutti gli *indici*, dei quali ora vado a discorrere: ma essendochè non resti nessuna difficultà dopo gettati i fondamenti di tutta questa specolazione, lascerò di trattenermi più a lungo, ed accennerò solamente i principali risultati del Calcolo. Per l'*indice* $\frac{2}{3}$ il *termine* della Serie Euleriana è uguale

(226) Tra gli altri può leggersi sulla fine l' *Esempio II.* della I. Proposizione della Sezione II. dell' *Analyse des Infiniment pétits* di Mr. De l' Hôpital (alla pag. 18. ediz. del 1768.). Nelle Opere MS. di Lorenzo Lorenzini avvi *Exercitatio III. de infinitis Ellipsoidibus & Hyperboloidibus*, ed è questa un bel Trattato geometrico delle proprietà delle innumerevoli Iperbole ed Ellissi, e perciò ancora dei Circoli di varj ordini. Sono ben lontane nulladimeno l'ultime Curve dal somigliare alla figura del Circolo. Difatto quella, di cui ragionò, à due *rami* infiniti ed un *asintoto* retto.

(227) Per esempio nel Tom. I. delle *Istituzioni* di Calcolo Integrale alle pagg. 232. 233. 244. 245. 259. 260. 269. 274. ed altrove. Vedasi ancora la *Nota* 334. della mia Opera *Exercitatio mathematica &c.*

(228) Bougainville *Traité du Calcul Intégral I.* Parte al num. CCXXX. p. 228, e Tom. IV. degli *Opuscules Mathématiques &c.* di Mr. D' Alembert alla pag. 280.

(229) Sia riletto il num. 23.

è uguale a $\infty \sqrt[3]{\infty^2} \cdot \int x^\infty dx\left(1-x\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{12}{14} \cdot \frac{15}{17} \cdot \frac{18}{20} \cdot \frac{21}{23} \ldots\ldots$

$\frac{3 \cdot \infty}{3 \cdot \infty + 2} \cdot \sqrt[3]{\infty^2}$ e prossimamente $= \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{12}{14} \cdot \frac{15}{17} \cdot \frac{18}{20} \cdot \frac{21}{23} \ldots\ldots$,

$\frac{3n}{3n+2} \cdot \sqrt[3]{n^2} = \sqrt[3]{2 \cdot 5 \cdot \int dx\left(x-xx\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \int dx\left(x^2-x^3\right)^{\frac{2}{3}}}$, il che concorda

altresì col *termine generale* esposto in principio (230), intesi sempre questi Integrali per il caso di $x=1$ senza necessità d' avvertirlo di nuovo in appresso. All' *indice* $\frac{4}{3}$ conviene il *termine* $\infty^2 \sqrt[3]{\infty} \cdot \int x^\infty dx$ $\left(1-x\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{7} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{9}{13} \cdot \frac{12}{16} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{18}{22} \cdot \frac{21}{25} \ldots\ldots \frac{3 \cdot \infty}{3 \cdot \infty + 4} \cdot \infty \sqrt[3]{\infty}$ e prossimamente $\frac{3}{7} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{9}{13} \cdot \frac{12}{16} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{18}{22} \cdot \frac{21}{25} \ldots\ldots\ldots \frac{3n}{3n+4} \cdot n \sqrt[3]{n} \ldots\ldots$

$= \sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \int dx\left(x-xx\right)^{\frac{4}{3}} \cdot \int dx\left(x^2-x^3\right)^{\frac{4}{3}}}$, andando così affatto

d' accordo tra loro le Formole Newtoniane colla prima espressione Euleriana del *termine generale* (231). L' *indice* $n=\frac{5}{3}$ conduce al *termine* $\infty^2 \sqrt[3]{\infty^2} \cdot \int x^\infty dx\left(1-x\right)^{\frac{5}{3}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{12}{17} \cdot \frac{15}{20} \cdot \frac{18}{23} \cdot \frac{21}{26} \ldots\ldots$

$\frac{3 \cdot \infty}{3 \cdot \infty + 5} \cdot \infty \sqrt[3]{\infty^2}$ e prossimamente $\frac{3}{8} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{12}{17} \cdot \frac{15}{20} \cdot \frac{18}{23} \cdot \frac{21}{26} \ldots\ldots$

$\frac{3n}{3n+5} \cdot n \sqrt[3]{n^2} = \sqrt[3]{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \int dx\left(x-xx\right)^{\frac{5}{3}} \cdot \int dx\left(x^2-x^3\right)^{\frac{5}{3}}}$, di concerto tra il primo *termine generale* spiegato nel Num. 2. e le Formole derivate dalle scoperte di Newton (232). Universalmente se

l' *in-*

(230) Num. 2. Ed in questo caso e nei seguenti l' esperimento di quella conferma porta seco la massima facilità.

(231) Come sopra nella *Nota* 229.

(232) Si torna a dire che l' unico fondamento di tuttociò sia la Serie $\frac{m}{M} \cdot \frac{m+n}{M+n} \cdot \frac{m+2n}{M+2n} \cdot \frac{m+3n}{M+3n} \cdot \frac{m+4n}{M+4n}$ &c. alla pag. 220. del Volume II. del *Traité des Fluxions* di Mr. Mac-Laurin.

l' *indice* fosse $\frac{n''}{3}$ posto n'' un numero intero *positivo* qualunque non divisibile senz' avanzo dal 3, il *termine* della Serie Euleriana espresso mediante la Funzione $\infty^{\frac{n''+3}{3}} \cdot \int x^{\infty} dx \left(1-x\right)^{\frac{n''}{3}}$ ridurrebbesi a pareggiare la Serie infinita $\frac{3}{3+n''} \cdot \frac{6}{6+n''} \cdot \frac{9}{9+n''} \cdot \frac{12}{12+n''} \cdot \frac{15}{15+n''} \cdot \frac{18}{18+n''} \cdot \frac{21}{21+n''} \cdot \ldots\ldots \frac{3 \cdot \infty}{3 \cdot \infty + n''} \cdot \infty^{\frac{n''}{3}}$ e prossimamente $\frac{3}{3+n''} \cdot \frac{6}{6+n''} \cdot \frac{9}{9+n''} \cdot \frac{12}{12+n''} \cdot \frac{15}{15+n''} \cdot \frac{18}{18+n''} \cdot \frac{21}{21+n''} \cdot \ldots\ldots \frac{3n}{3n+n''} \sqrt[3]{n^{n''}}$; Serie elegantissima quant' altra mai, la quale discuopre l'origine e la *forma* della composizione di tutte le precedenti; Serie che mostra perchè tutte debbano avere gl' istessi *numeratori*, e per *denominatori* delle Progressioni aritmetiche, la cui differenza sia il medesimo numero 3, Serie finalmente che accordandosi col primo *termine generale* somministrato dall' Euler parte dal solo principio Newtoniano (233) consistente nella Proporzione $\int x^{r} dx \left(1-x\right)^{\frac{n''}{3}} : \int dx \left(1-x\right)^{\frac{n''}{3}} = \frac{3}{3+n''} : \frac{3}{6+n''} \cdot \frac{6}{9+n''} \cdot \frac{9}{12+n''} \cdot \frac{12}{15+n''} \cdot \frac{15}{18+n''} \cdot \frac{18}{21+n''} \cdot \frac{21}{24+n''} \cdot \ldots\ldots : 1.$

Leo-

---

(233) Luogo citato nella *Nota* antecedente. E' poi chiarissimo che $\int dx \left(1-x\right)^{\frac{n''}{3}} = \frac{3}{3+n''}$ da $x=0$ sino a $x=1$. Si veda a questo proposito l'eccellente recentissima *Memoria*, di cui parla la *Nota* 125, dove Sir Vince alle pagine 433. 34. e 35. (Ex. 1. e 2) perfeziona il metodo di Sir Isaac Newton adattandolo ai Fluenti $\int \frac{x^{2r} \cdot dx}{\sqrt{1+x^2}}$, $\int x^{r} dx \sqrt{2+x}$, conosciuti che siano $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, ... $\int x^{-\frac{1}{2}} dx \sqrt{2+x}$, e lo generalizza per tutti i casi possibili della *variabile*.

Leonardo Euler avendo insegnato (234) come ottenere quella tale Area o Quantità *trascendente*, cui si riporta questa Serie infinita (235), vediamo adesso piuttosto dove conduca il mio metodo applicato agl' *indici negativi* $-\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$. Rispetto al primo non v' à dubbio che seguitando le tracce medesime Newtoniane abbiasi per *termine* della Serie $\infty^{\frac{2}{3}}.\int x^{\infty} dx\left(1-x\right)^{-\frac{1}{3}}$ per il caso di $x=1$, eguale alla Serie infinita $\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{12}{14}\cdot\frac{15}{17}\cdot\frac{18}{20}\cdot\frac{21}{23}\ldots\ldots=\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{15}{14}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{21}{20}\ldots\ldots\frac{3.\infty}{3.\infty-1}\;\frac{3\sqrt[3]{\infty^2}}{3.\infty+2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{15}{14}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{21}{20}\ldots\ldots\frac{3.\infty}{3.\infty-1}\;\frac{1}{\sqrt[3]{\infty}}$, o sivvero prossimamente $\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{15}{14}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{21}{20}\ldots\ldots\frac{3n}{3n-1.\sqrt[3]{n}}$. In modo consimile $\infty^{\frac{1}{3}}.\int x^{\infty} dx\left(1-x\right)^{-\frac{2}{3}}$ si risolve nella Serie omologa $\frac{3}{1}\cdot\frac{6}{4}\cdot\frac{9}{7}\cdot\frac{12}{10}\cdot\frac{15}{13}\cdot\frac{18}{16}\cdot\frac{21}{19}\ldots\ldots\frac{3.\infty}{3.\infty-2\sqrt[3]{\infty^2}}$ e prossimamente $\frac{3}{1}\cdot\frac{6}{4}\cdot\frac{9}{7}\cdot\frac{12}{10}\cdot\frac{15}{13}\cdot\frac{18}{16}\cdot\frac{21}{19}\ldots\ldots\frac{3n}{3n-2.\sqrt[3]{n^2}}$, non adattandosi nè a questa nè all' altra il metodo delle *Quadrature* impiegato ingegnosamente dall' Euler (236).

25. Cogli istessi principj si potrebbe discendere ad *intercalare* i *termini* della Serie per gli *indici* $\frac{n'''}{4}$, supponendo denotato da

K ij n''' qua-

(234) Non solo nell' uno ed altro Volume ai luoghi citati dalla *Nota* 106, ma ancora nel §. 37. a pag. 25. dell' XI., che si può dire il fondamento di tutto. Di qui è che l' Autore scrivesse „ $\int dx\left(-Lx\right)^{\frac{p}{q}}$ *per quadraturam Curvarum algebraicarum exprimi potest* „.

(235) Sia riletto il num. 11. nel suo principio.

(236) Così dimostrai nel prefato num. 11. (verso la fine) anche del *termine* relativo all' *indice* $-\frac{1}{2}$.

n''' qualunque dei numeri *dispàri* interi e *positivi*, ed ancora *negativi* purchè non più avanti di -3. Così per esempio il *termine* relativo all' *indice* $\frac{1}{4}$ è uguale a $\frac{4}{5} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{16}{17} \cdot \frac{20}{21} \cdot \frac{24}{25} \cdots \frac{4 \cdot \infty}{4 \cdot \infty + 1}$. $\sqrt[4]{\infty}$ e prossimamente $\frac{4}{5} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{16}{17} \cdot \frac{20}{21} \cdot \frac{24}{25} \cdots \frac{4n}{4n+1}, \sqrt[4]{n}$, posto sempre n il numero delle *frazioni* come ò praticato di sopra; ed il *termine* relativo all' *indice* $-\frac{1}{4}$ discuopresi rappresentato dall' altra Serie $\frac{4}{3} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{20}{19} \cdot \frac{24}{23} \cdots \frac{4\infty}{4 \cdot \infty - 1 . \sqrt[4]{\infty}}$ e prossimamente $\frac{4}{3} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{20}{19} \cdot \frac{24}{23} \cdots \frac{4n}{4n-1 . \sqrt[4]{n}}$ secondo il metodo tenuto dal Wallis. Ancor quì merita osservazione che il *numeratore* di queste Serie per tutti gli *indici* $\frac{n'''}{4}$ si conservi sempre immutabile; e che tanto i *numeratorî*, quanto i *denominatori* delle *fràzioni* componenti formino delle Progressioni aritmetiche dove la differenza dei termini sia il numero 4, cioè l' esponente dei *termini intercalati* (237). Molto vicina alle Serie premesse è quella considerata da S. Kotelnikow nel Tomo X. dei *Commentarj nuovi* dell' Accademia Imperiale di Pietroburgo (238), cioè $\frac{2. \; 6. \; 10. \; 14. \; 18. \; 22. \ldots (4n-10)}{2. \; 3. \; 4. \; 5. \; 6. \; 7. \ldots (n-1)}$, o sivvero chiamando n' il numero dei *fattori*, $\frac{2. \; 6. \; 10. \; 14. \; 18. \; 22. \ldots}{2. \; 3. \; 4. \; 5. \; 6. \; 7. \ldots} \frac{(4n'-2) \ldots (4 \cdot \infty - 2)}{(n'+1) \ldots (\infty + 1)}$ indicante il numero di tutte le costruzioni

(237) E' *legge* universale per tutti gli altri *indici frazionarj*. Le Progressioni aritmetiche prendono sempre regola dal *denominatore* dell' *indice* dopochè questo sia stato ridotto ai suoi minimi termini. Così fu veduto rispetto agli indici $\frac{n'}{2}$. Ancora quì ricorrendo alle *Quadrature*, verrebbero fuori altri Circoli di grado superiore a quello del num. 24.

(238) *Demonstratio Seriei* $\frac{2. \; 6. \; 10. \; 14. \; 18. \; 22. \ldots (4n-10)}{2. \; 3. \; 4. \; 5. \; 6. \; 7. \ldots (n-1)}$ *exhibitæ in recensione VI. Tomi VII. Commentariorum A. S. P.* dalla pag. 199. sino a 205.

ni possibili d' un Poligono quando n rappresenti il numero de' suoi Lati (239). La natura e la classe di questa Serie non furono allora ben' accertate nè dall'Autore predetto nè tampoco da chi lo precedette in questa bella ricerca, come apparisce dal Tomo VII. dell' istessa Accademia, nè da chi venne dopo di lui. Specolando alcuni anni sono sopra di essa trovai facilmente che riducevasi all'altra *forma* $2^{n'}\left(\frac{1.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ldots\ldots(2n'-1)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ldots\ldots(n'+1)}\right)$, e che questa aveva per proprietà quella insigne a mio giudizio ed elegantissima d'accostarsi sempre più la ragione del *numeratore* al *denominatore* dei suoi *fattori* alla dupla, quanto più cresce n', e finalmente diventar dupla continuandosi all' infinito. Tranne il *moltiplicatore* $2^{n'}$, si ravvisa con tutta evidenza che gli elementi componenti il *numeratore*, supposto continuato all' infinito sian quelli istessi della Formula Newtoniana considerata nel Num. 17, e quanto agli elementi del *denominatore* son quelli istessi della medesima Formola, ma replicati di mezzo a loro gli elementi del divisato *numeratore*. Non è nemmeno difficile trovarne per mezzo delle *Quadrature* il *termine generale* oltre di quello espresso di sopra per mezzo dei suoi *fattori* (240). Imperocchè per rappresentarlo, ed *intercalare* quando piacesse tutti i *termini* intermedj, si fa luogo alla Formola . . . . .

$$\frac{2^{2n'+1}\ .\int dx\left(-Lx\right)^{n'}}{\left(2n'+1\right)\int x^{-\frac{1}{2}}dx\left(1-x\right)^{n'}.\int dx\left(-Lx\right)^{n'+1}}$$ nella solita ipotesi di $x=1$ stabilita sin da principio.

26. Meditando sopra i due Numeri precedenti ognuno sà concepire come verrebbero adesso ad inserirsi tra i *termini* della Serie Euleriana corrispondenti ad *indici* interi e *positivi* degli altri *termini* in qualunque numero ed ordine, che si volessero *intercalati* tra i primi, onde ampliare le *Tavole* sino ad ora prodotte (241). Conosce parimente da se medesimo come rintracciar facilmente dei *ter-*

(239) All' effetto di fissar l' epoca, basti il sapere che il Tomo X. dei *nuovi* dell' Imperiale Accademia di St. Petersbourg si riporta all'anno 1764, e l'edizione è del 1766.

(240) Tomo V. di Pietroburgo tra gli *antichi* alla pag. 48. e §§. 16. 17, e Tom. XI. dell' istessa classe al §. 5. e pag. 5. In questi luoghi citati esistono tutti i principj onde mettere insieme la Funzione *trascendente*, che siegue.

(241) Queste si trovano nel Tom. XVI. dell'Accademia di Berlino, citato sin dalla *Nota* 2, e precisamente alle pagg. 257. 258. e segg., delle quali n' ò dato un saggio nel num. 14.

termini senza fine dalla parte degli *indici negativi*, purchè questi ultimi non arrivino a -1, locchè risulta altresì dalla forma del *termine generale* accennato prima di tutto nel Num. 2; e concorda colle più antiche teorie del grand' Euler (242). Accade oltrediciò che come appunto in virtù dei Numeri 17. 18. e 20. i *termini* della Serie Euleriana, i quali abbian per *indici* $\frac{n'}{2}, \frac{n'+1}{2}, \frac{n'+2}{2}, \frac{n'+3}{2}, \ldots\ldots, \frac{n'+n}{2}$; dipendono uno dall' altro, e replicandosi non differiscono che nei soli *coefficienti*, non diversamente appartenga questa medesima proprietà a tutti gli *indici* possibili *frazionarj*, purchè si verifichi la medesima condizione. E difatto siano i due *indici* $\frac{1}{3}$ e $\frac{4}{3}$. Ad essi corrispondono i *termini* $\frac{3.\,6.\,9.\,12.\,15.\,18.\,21.\ldots\ldots 3.\infty}{4.\,7.\,10.\,13.\,16.\,19.\,22.\ldots\ldots(3.\infty+1)} \cdot \sqrt[3]{\infty} = A'$, e $\frac{3.\,6.\,9.\,12.\,15.\,18.\,21.\ldots\ldots 3.\infty}{7.\,10.\,13.\,16.\,19.\,22.\,25.\ldots\ldots(3.\infty+4)}$.

$$\infty\sqrt[3]{\infty} = B' = 4\left(\frac{3.\,6.\,9.\,12.\,15.\,18\,21.\ldots\ldots 3.\infty\;.\;\infty\sqrt[3]{\infty}}{4.\,7.\,10.\,13.\,16.\,19.\,22.\ldots\ldots(3.\infty+1)\,(3\,\infty+4)}\right)$$

$= \frac{4}{3}.\ A' = \frac{2\,.\,2}{1\,.\,3}\ A'$, poichè $\frac{\infty}{3.\infty+4} = \frac{1}{3}$. Parimente scegliendo gli altri due *indici* $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{3}$, cui competono i *termini* di già trovati nel 24. Numero precedente $\frac{3.\,6.\,9.\,12.\,15.\,18.\,21.\ldots\ldots 3.\infty}{5.\,8.\,11.\,14.\,17.\,20.\,23.\ldots\ldots(3.\infty+2)} \cdot \sqrt[3]{\infty^2} = C'$; e $\frac{3.\,6.\,9.\,12.\,15.\,18.\,21.\ldots\ldots 3.\infty}{8.\,11.\,14.\,17.\,20.\,23.\,26.\ldots\ldots(3.\infty+5)} \cdot \infty\sqrt[3]{\infty^2} = D'$, quest' ultimo si riduce alla *forma* seguente $5\left(\frac{3.\,6.\,9.\,12.\,15.\,18.\,21.\ldots\ldots 3.\infty.\infty.\sqrt[3]{\infty^2}}{5.\,8.\,11.\,14.\,17.\,20.\,23.\ldots\ldots(3.\infty+2)(3.\infty+5)}\right)$

$= \frac{5}{3}\ .\ C'$. La *legge* è facile a riconoscersi; e questo metodo serve a

---

(242) Egli difatto scrisse d'un caso consimile (§. 17. pag. 48. del Tom. V. di Pietroburgo &c.). *Quanquam hîc exponens ipsius x sit negativus, tamen id incommodum, de quo supra dictum, hîc locum non habet, cum sit unitate minor.*

ve a rintracciare con molto compendio di Calcolo i *termini* intermedj della bella Serie proposta. Chi per esempio dopo trovato, come si è fatto nel Num. 25, il *termine* relativo all'*indice* $\frac{1}{4}$, ch' io nomino E', cercasse quello corrispondente all' altro *indice* $\frac{5}{4}$, che può intendersi mediante la Sigla F', incontrerebbe . . . . . .

$$F' = \left(\frac{4.\ 8.\ 12.\ 16.\ 20.\ 24 \ldots\ldots 4\,\infty\ .\ \infty}{5.\ 9.\ 13.\ 17\ \ 21.\ 25 \ldots (4.\infty+1)(4.\infty+5)} . \sqrt[4]{\infty}\right)^{5} = \frac{5}{4}.\ E',\ \textit{neque}$$

limitem novit Analysis. Ma si potrebbe egli forse con questo modo più semplice rintracciare ancora quei *termini*, cui spettano gli indici $\pm\frac{1}{2}$? Sì: è ciò che ò promesso nella *Nota* 142, e che vado adesso a provare. Abbiamo difatto $\infty\sqrt{\infty}.\int x^{\infty} dx\left(1-x\right)^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots$

$$= \frac{2.\ 2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 14 \ldots\ldots (2.\infty-2)\ 2.\infty}{3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13.\ 15.\ 17.\ (2.\infty-1)(2.\infty+1)(2.\infty+3)} .\ \infty\sqrt{\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\right.$$

$$\left.\frac{6}{7}.\frac{8}{9}.\frac{10}{11}.\frac{12}{13}.\frac{14}{15}.\frac{16}{17}\ldots\ldots\frac{(2.\infty-2)}{(2.\infty-1)}\right) 2\sqrt{\infty} = \frac{1}{2}.\ \sqrt{c}$$ colla guida della sola Serie e Proporzione data da Mac-Laurin in seguito di un Teorema di Newton (243). E per l' indice $-\frac{1}{2}$ abbiamo egualmente colla medesima unica scorta (244) l' altra Equazione $\sqrt{\infty}$.

$$\int x^{\infty} dx\left(1-x\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{1}.\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}.\frac{8}{9}.\frac{10}{11}\ \frac{12}{13}\ldots\ldots\frac{(2.\infty-2)(2.\infty)\ (2.\infty+2)}{(2.\infty-1)(2.\infty+1)(2.\infty+3)}.$$

$$\sqrt{\infty} = \frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}.\frac{8}{9}.\frac{10}{11}.\frac{12}{13}\ldots\frac{2.\infty-2}{2.\infty-1}\,2\sqrt{\infty} = \sqrt{c}$$ secondo le dimostrazioni premesse (245). Questa lusinghevole facilità oltrechè serve a confermare viepiù l'attività ed efficacia di quella forma del *termine generale*, che parve inefficace al penetrante ingegno dell' Euler, siccome avvertii sino dal Num. 9, mi sarebbe stata d'eccitamento

(243) Si consulti la *Nota* 232. e la confessione di Mac-Laurin nel § 789. alla pag. 218. del Volume ivi accennato. Del resto l' applicazione al caso nostro è assai facile, perchè $n=1$, $m=1$, $l=\frac{1}{2}$, e perciò $M=ln+n+m=\frac{5}{2}$, $r=\infty$, $e=1$, $f=1$, $A\left(\frac{c^r}{f^r}\right) = A = \frac{2}{3}$.

(244) Vagliono le medesime sostituzioni espresse poc' anzi, colla differenza che qui $l=-\frac{1}{2}$, onde $M=\frac{3}{2}$ ed $A=\frac{2}{1}$.

(245) Particolarmente nella *Nota* (131) per maggior lume dei Dilettanti di Matematica.

tamento a presceglier dapprima il cammino brevissimo, se non avessi voluto seguitar dappresso l'orme lasciate da Newton (246), e compruovare per molte parti la verità delle presenti ricerche.

27. Rimane adesso a parlare degli *indici negativi* incominciando da -1; perocchè sino a -1 abbiamo veduto nei Numeri 17. 24. 25. e 26. come il metodo da noi proposto faccia subito conseguire i *termini intercalati* della Serie Euleriana. La considerazione è del tutto nuova e non poco intralciata, ed aprirebbe un campo vastissimo per delle meditazioni profonde. Io non farò che abbozzarla, rammentando per tutto ciò, dov' io andassi lontano dal vero, il bel detto di Jacopo Bernoulli (247). *Il est extrêmement facile de se méprendre dans toutes ces connoissances, si l'on n'y fait pas toujours une serieuse attention*. Qualora si sperimentino a quest' effetto tanto il *termine generale* dato dal vecchio Euler per mezzo di *fattori* infiniti (248), quanto il metodo d' *interpolazione* usato dal Figlio (249), vanno ambidue perfettamente d'accordo tra loro. E l' uno e l' altro partendo dall' *indice* -1 (giacchè il tratto più raro e mirabile della Serie consiste nel breve intervallo da 0 a -1, ossia nell'anello che unisce insieme le nuove colle già fatte ricerche) somministrano per gli *indici* interi *negativi* $-1, -2, -3, -4, -5, -6, \ldots, -n$ i seguenti *termini* $\infty, -\frac{1}{1}.\infty, +\frac{1}{1.2}.\infty, -\frac{1}{1.2.3}.\infty, +\frac{1}{1.2.3.4}.$

$$\infty, -\frac{1}{1.2.3.4.5}.\infty, \ldots\ldots, \pm\frac{1}{1.2.3.4.5\ldots\ldots(n-1)}.\infty,$$

che vale a dire Infiniti, tutti tra loro *comparabili*, ed alternativamente *positivi* e *negativi* secondo che l' indice $-n$ sia *dispari* o *pari*. La *legge* della Progressione non potrebbe mai essere nè più semplice nè più bella. Imperocchè tranne il *coefficiente* ∞ (ch'è l' Infinito *ordinario* $1+1+1+1+1+1+1$ &c.) (250), il quale si replica sempre per tutti i *termini*, ed astraendo dal *segno*, che come ò detto si alterna cominciando dal *positivo*, il rimanente non è che l' inverso del valore dei *termini* corrispondenti agli *indici positivi* $n-1$

(246) Come ò fatto nei numeri 17. e 18., dove è subito in mostra senz'altro esame la dipendenza dal Circolo.

(247) *Ars conjectandi &c.*, *Epistola gallicè scripta de Ludo Pilæ reticularis* (vedasi la *Nota* 158). In fondo di questa Lettera *sur le Jeu de Paume*, dopo il Cap. IV. dell' Opera, avvi il passo citato.

(248) Numeri 1. e 2.

(249) Numeri 12. 13. e 14.

(250) S' abbia sempre presente il detto nel num. 8. Simili distinzioni non debbono più ferire oggidì le caste orecchie dei Matematici.

$n-1$, e pare che conservi però il carattere ed indole primitiva della Serie Euleriana. Accade in somma non sò che di simile a certe più antiche Serie considerate da alcuni Analisti (251), tra le quali primeggiano atteso la mirabile loro eleganza $\frac{3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8. \ldots\ldots n}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6. \ldots\ldots (n-2)} = \frac{n(n-1)}{1\ .\ 2}$, $\frac{4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9. \ldots\ldots n}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6. \ldots\ldots (n-3)} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$, ed altre di simil sorte (252). Difatto anche in queste, se n fosse infinito, cioè se venissero inoltrate di là da ogni *limite* assegnabile come segue di quelle rappresentanti il *termine generale* spiegate nei Numeri 2. e 3., avverrebbe che fossero $\frac{\infty^2}{1\ .\ 2}$, $\frac{\infty^3}{1.\ 2.\ 3.}$, &c., ossia roversciate in confronto dell'altre della Serie dell' Euler, che considerammo principalmente (sebbene colla *potenza* dell' Infinito superiore d'un grado) nel Num. 9. Presso a poco si verificano le medesime circostanze, e pienamente l' inversione dei *coefficienti* ed alternativa di *segni* nei *termini intercalati*, per gli *indici* $-\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{2}$, $-\frac{7}{2}$, $-\frac{9}{2}$, ..., $-\frac{n'}{2}$, ai quali apparterrebbero $-\frac{2}{1}.\sqrt{C}$, $\frac{2.2}{1.3}.\sqrt{C}$, $-\frac{2.\ 2.\ 2}{1.\ 3.\ 5.}.\sqrt{C}$, $\frac{2.\ 2.\ 2.\ 2.}{1\ 3.\ 5.\ 7.}.\sqrt{C}$, ..., $\mp\frac{2.2.2.2.2.\ldots 2.\sqrt{C}}{1.\ 3.\ 5\ 7\ 9\ldots(n'-2)} = \frac{\mp 2^{\frac{n'-1}{2}}}{1.\ 3.\ 5.\ 7\ 9\ldots(n'-2)}.\sqrt{C}$, che salva la comune Funzione *o fattore* $\sqrt{C}$ sono appunto le Formole inverse rispetto a quelle spettanti agli *indici* $\frac{n'-1}{2}$ come sopra (253), e tutte di grandezza finita, ma *negative* quando $n'-1$ sia *impariter par*, e positive nel caso contrario. A fine di essere cerziorati che il modo adoprato dai due Euler veramente conduca ai valori suddetti, e che in questo per-

(251) Vedasi la *Dissertazione* citata dalla *Nota* 238.

(252) Kotelnikow mirava a comporre una Teoria sublime di Agrimensura servendosi di queste Serie, che non sò dire se venisse dipoi pubblicata, in aggiunta del Libro assai bello e profondo stampato dal Marinoni *De re ichnographica*.

(253) Il paragone può farsene con quelle dei numeri 6. e 14.

fettamente combinino tanto quello *a priori*, quanto l'altro *a posteriori*, facciamo l'esperimento dell'ultimo, e quindi del primo. In virtù della prima delle due *leggi* della Serie stabilita da Euler il figlio, siccome ò detto nel Num. 13, se v sia il termine per l'*indice* m, e sia t per l'*indice* $m+1$, è certo che abbiasi sempre $t = (m+1)\, v$, e vale a dire viceversa $v = \frac{t}{m+1}$. Dunque adattando l'*interpolazione* agli *indici* interi, e retrocedendo da o, cui spetta il *termine* 1 secondo il dimostrato di sopra (254), si consegue per -1 il *termine* $v = \frac{1}{-1+1} = \frac{1}{0} = \infty$, per -2 il *termine* $v = \frac{\infty}{-2+1} = -\frac{1}{1}\cdot\infty$, per -3 il *termine* $v = \frac{-\infty}{-3+1} = \frac{1}{1\,.\,2}\cdot\infty$, per -4 il *termine* $v = \frac{\infty}{2(-4+1)} = -\frac{1}{1.\ 2.\ 3.}\cdot\infty$, per -5 il *termine* $v = \frac{-\infty}{6(-5+1)} = \frac{1}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}\cdot\infty$, e così senza fine per tutti gli altri che sieguono. Ed *interpolati* colla scorta della medesima *legge* i *termini* corrispondenti agli *indici* $-\frac{n'}{2}$, principiando da $-\frac{1}{2}$, e parimente retrocedendo, si ottengono per $-\frac{3}{2}$ il *termine* $v = \frac{\sqrt{c}}{\frac{-3}{2}+1} = -\frac{2}{1}\cdot\sqrt{c}$, per $-\frac{5}{2}$ il *termine* $v = \frac{-2\sqrt{c}}{\frac{-5}{2}+1} = \frac{2\,.\,2}{1\,.\,3}\cdot\sqrt{c}$, per $-\frac{7}{2}$ il *iermine* $v = \frac{4\sqrt{c}}{3(\frac{-7}{2}+1)} = -\frac{2.\ 2.\ 2.}{1.\ 3.\ 5.}\cdot\sqrt{c}$, e così in infinito.

Qualora poi si adoperasse piuttosto il *termine generale* decifrato nel Num. 2, ognun vede che per l'*indice* -1 averebbesi $v = \frac{1.\quad 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ \&c.}{(1-1).\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ \&c.} = \frac{1}{0} = \infty$, per l'*indice* -2 verrebbe ad essere $v = \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ \&c.}{-1.\ 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ \&c.} = -\frac{1}{1}\cdot\infty$, per l'indice -3 conseguirebbesi

(254) Numeri 2. 9. 12. e altrove.

rebbesi $v = \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ \&c.}{-2.-1.\ 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \&c.} = \frac{1}{1.2}.\infty$, per l'*indice* -4

si otterrebbe $v = \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ \&c.}{-3.-2.-1.\ 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ \&c.} = -\frac{1}{1.\ 2.\ 3.}.\infty$, e col

metodo istesso mandando sempre più avanti il *denominatore*, all' opposto di ciò, che avvisai nel Num. 20, nascerebbero tutti i *termini* consecutivi. Non diversamente investigando i *termini* frapposti tra quelli di già ritrovati, corrisponderebbe all' *indice* $-\frac{1}{2}$ la

Serie $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ \&c.}{-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}.\frac{9}{2}.\frac{11}{2}\ \&c.} = v = -2\left(\frac{1.2\ 3.4.\ 5.\ 6.\ 7.\ \&c.}{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}.\frac{9}{2}.\frac{11}{2}.\frac{13}{2}.\&c.}\right) = -\frac{2}{1}.\sqrt{C}$

in virtù dei Numeri 5. e 6, all'indice $-\frac{3}{2}$ la Serie $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4\ 5.\ 6.\ 7.\ \&c.}{-\frac{3}{2}.-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}.\frac{9}{2}.\&c.} =$

$v = \frac{2.2}{1.3}\left(\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ 7.\ \&c.}{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}\ \frac{7}{2}.\frac{9}{2}.\frac{11}{2}.\frac{13}{2}.\ \&c.}\right) = \frac{2.2}{1.3}.\sqrt{C}$, all' *indice* $\frac{5}{2}$ l'altra

Serie $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ \&c.}{-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{7}{2}.\&c.} = v = -\frac{2.2.2}{1.3.5}\left(\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ \&c.}{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{7}{2}\ \frac{9}{2}.\frac{11}{2}.\frac{13}{2}.\&c.}\right) = -$

$\frac{2.\ 2.\ 2}{1.\ 3.\ 5}.\sqrt{C}$. non procedendo altrimenti che cogli istessi principj

nel rimanente. Un accordo così seducente delle risultanze di due metodi diversissimi tra di loro, unito alla vista d'una progressione di *termini* dalla parte degli *indici negativi* (interi e frazionarj) consimile a quella che accompagna i *termini* corrispondenti agli *indici positivi*, farebbe subito credere con molta apparenza di ragione che tutti quei *termini* fossero veri, ed appartenessero alla continuazione della Serie Euleriana. Contuttociò questi *termini* mi sembrano falsi; ed il ritrovamento della fallacia nascosta farà conoscere semprepiù di qual pericolo sia illimitatamente fidarsi dei metodi d' *interpolazione* (255), o della *forma* delle Serie Infinite, delle quali non s'abbia appieno presente la disposizione degli ul-

 timi

(255) Riscontrando la *Tavola* del num. 14. egli è manifesto che se il giovane Euler avesse impostato, come poteva, il principio della numerazione o sivvero

timi termini, che si avanzano nell'infinito (256). L'unico mezzo per discuoprire quali siano con tutta sicurezza i *termini* della medesima Serie per gli *indici negativi* è a mio giudizio quello d'esporgli al cimento del *termine generale* $\infty^{-n+1}\int x^{\infty}dx\,(1-x)^{-n}$; poichè questa Formola ci è stata sempre di guida fedele dall' *indice* -1 sino all' *indice* ∞. Difatto anche in quest'ultimo caso troviamo

$$\infty^{\infty+1}\int x^{\infty}dx\,(1-x)^{\infty}=\left(\frac{1}{\infty+1}\cdot\frac{1}{\infty+2}\cdot\frac{2}{\infty+3}\cdot\frac{3}{\infty+4}\cdot\frac{4}{\infty+5}\cdot\frac{5}{\infty+6}\cdot\frac{6}{\infty+7}\cdot\ldots\cdot\frac{\infty}{2\cdot\infty+1}\right)\infty^{\infty+1}$$

colla solita Formola Newtoniana (257); e quella Serie dedotta dalla supposizione di $x=1$ concorda perfettamente

sivvero l'incognita x'' più indietro, per esempio all'*indice* $-\frac{5}{2}$, averebbe ottenuto i valori seguenti colle sue stesse *leggi*

$-\frac{5}{2}$	x''
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}\cdot x''$
$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot x''$
$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2}\cdot x''$
$+\frac{3}{2}$	$+\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}\cdot x''$
$+\frac{5}{2}$	$+\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}\cdot x''$
$+\frac{7}{2}$	$+\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}\cdot x''$
&c.	&c.

laonde, siccome $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot x''=\sqrt{c}$, veniva ad essere per l'*indice* $-\frac{3}{2}$ il *termine* $=-\frac{2}{1}\cdot\sqrt{c}$, e per l'*indice* $-\frac{5}{2}$ il *termine* $=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\sqrt{c}$, cosicchè questo metodo indiretto dell' Euler senza nessun cambiamento sostanziale condurrebbe, salvo il rimanente, anche ai *termini* falsi.

(256) Specialmente si veda ciò, che ò avvertito nel num. 5.

(257) *Nota* 232.

tamente (258) coll'altra Serie dell' Euler $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4}$ $\frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \ldots\ldots n}{(n+5)(n+6)(n+7 \ldots\ldots 2n}$, il cui *termine generale* per le *Quadrature* è la Funzione $(2n+1)\int x^n\, dx\, (1-x)^n$. Imperocchè posto $n=\infty$, viene ad essere come sopra $\int x^\infty dx(1-x)^\infty = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot}{(\infty+1)(\infty+2)(\infty+3)(\infty+4)}$ $\frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots\ldots(\infty-1)\ \infty}{(\infty+5)(\infty+6)(\infty+7)\ldots\ldots 2.\infty.(2.\infty+1)}$. E mi pare che di quì ne derivi essere $(\infty+1(\infty+2)(\infty+3)(\infty+4)(\infty+5(\infty+6)\infty+7)\ldots\ldots$ $2.\infty.(2.\infty+1)=\infty^{\infty+1}$.

28. Tutta la specolazione seguente si appoggia sopra il valore di $\infty^{-1+1}\int\frac{x^\infty dx}{1-x}=\int\frac{x^\infty dx}{1-x}$, ch' è la *forma* del *termine generale* $\int x^\infty dx\,(1-x)^{-1}=\int dx'(-Lx')^{-1}$ coerentemente alle premesse dimostrazioni (259). E' poi di per se manifesto che $\int dx'(-Lx')^{-1}=-$ $\int\frac{dx'}{Lx'}=\int\frac{dx'}{L\left(\frac{1}{x'}\right)}$; dimodochè ciò che mi resta di dire, dipenda da trovare il valore dell' ultima Formola posto $x'=1$, valore che non potè assegnare il grand' Euler, e del quale parlò con dei termini di tal sorte da far poco sperare ad altri miglior fortuna di lui. Ecco com' egli s' espresse difatto in più luoghi (260). *Cujus $\frac{dz}{lz}$ integrale si assignari posset, amplissimum usum in Analisi*

esset

(258) Nel Tomo V. dei vecchi Atti dell'Accademia di Pietroburgo si guardi al §. 20. e pag. 51.

(259) Si veda anche quì sotto il num. 29.

(260) Particolarmente nello *Scolio* a pag. 134. §. 219. del Tom. I. *Institutionum Calculi Integralis*.

esset allaturum ; vero nullis adhuc artificiis neque per logarithmos, neque angulos exhiberi potuit .... Videtur ergo hæc formula $\int \frac{dz}{lz}$ *singularem speciem functionum transcendentium suppeditare, quæ utique accuratiorem evolutionem meretur.* Ed altrove (261). *Quod integrale* $\int \frac{dz}{lz}$ *si debeat evanescere, sumto* $z=0$, *constans* C *fit infinita, unde pro reliquis casibus nihil concludi potest. Idem incommodum locum habet, si evanescens reddamus casu* $z=1$ .... *Cæterum patet.. .Hinc ergo natura hujus functionis transcendentis parum cognoscitur*, sebbene tentasse di scioglierla in delle Serie infinite (262). Questa insuperabile difficultà incontrata dall'Euler averebbe dovuto subito allontanarmi dall'intraprendere qualunque nuova ricerca (263). Contuttociò mi è sembrato che fosse meglio incorrere nel pericolo d' ingannarsi, piuttosto che tralasciare la più bella parte dell' argumento, che avevo tra mano. Rammentiamoci adunque (264) che da $x=0$ sino a $x=1$ tanto vaglia l' Integrale $\int dx\left(-Lx\right)^{-1}$, quanto l'altro $\int d\left(x^{\infty}\right)\left(-L(x^{\infty})\right)^{-1} = \int \infty . x^{\infty} dx \left(\frac{1-(x^{\infty})^{0}}{0}\right) = \int 0.\infty . x^{\infty} dx\left(1-(x^{\infty})^{0}\right)^{-1} = \int x^{\infty} dx \left(1-x\right)^{-1}$; cosicchè quello, che sarò adesso per dire dell' ulti-

(261) *Scolio* alla pag. 140. §. 228. del Volume citato. E' per isbaglio che l'Autore rimandi al §. 227. nell'altro *Scolio* additato di sopra.

(262) Luogo citato. Gli convenne però cambiar forma, e ridurla in Esponenziale. E' ben vero che nel Tom. IV. *Nova Acta Academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitanæ* per l'anno 1786. edizione del 1789, e precisamente nella sua Dissertazione *Evolutio Formulæ Integralis* $\delta x\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{lx}\right)$ *a termino* $x=0$ *usque ad* $x=1$ *extensæ* (da pag. 3. a 16), e nell'altra *Uberior explicatio &c.* (da 17. a 54.), ambedue postume ed esibite sino del 29. Febbrajo 1776, aveva adornata di più questa difficil parte del Calcolo; e tenterò di provare nel mio *Diporto Analitico* come tenendo conto delle *costanti* i di lui resultati non siano in contradizione co' miei.

(263) Facendo la giusta antitesi dell' espressione da lui adoperata (luogo citato pag. 135.) *Formulas igitur magis tractabiles evolvamus &c.*, questo solo in bocca di sì grand' Uomo dimostra quanto sia azzardoso il cimento.

(264) Numero 29. indicato di già dalla *Nota* 259. Euler usò presso a poco l'istesso metodo nel Tom. XIX. citato dalla *Nota* 266. (alla pag. 68.)

ultima Formola, debba intendersi eziandio della prima. Richiamiamo parimente alla nostra memoria che secondo il Num. 9. il *termine* della Serie propostaci sin da principio, corrispondente all' *indice* —1, venga dato dalla Serie, la quale nasce direttamente dal Binomio Newtoniano (265), ed è Serie infinita come lo sarebbe in tutti gli *indici* frazionarj *positivi*, ed in tutti gli altri *indici negativi*, e non perdiamo di vista che adesso ell' abbia la *forma* seguente $\frac{1}{\infty+1}+\frac{1}{\infty+2}+\frac{1}{\infty+3}+\frac{1}{\infty+4}+\frac{1}{\infty+5}+\frac{1}{\infty+6}+\ldots\ldots$ $\frac{1}{\infty+7}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2.\infty}$. Non v'à chi non sappia oggimai essere siffatta espressione $=L2$. Quindi è che il *termine* di quella Serie, della quale sia *termine generale* $\infty^{n+1}\int x^{\infty}dx\,(1-x)^{n}$, per il caso dell' *indice* -1, e sempre inteso l' Integrale da $x=0$ sino a $x=1$, combini col valore del *Logaritmo* Iperbolico del *Numero* 2, non meno che $\int\frac{dx}{-Lx}$, onde $\int\frac{dx}{Lx}=-L2$ contra il sentimento dell' Euler (266). L' istesso Euler fu il primo, per quanto io sappia, che dimostrasse essere quella Serie infinita; tutta composta di termini infinitamente-piccoli, uguale a L2, come apparisce (267) dal suo Teorema $\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\ldots\ldots+\frac{1}{2m}=L2+\frac{3}{4}m$ subitochè pongasi $m=\infty$, ed $\frac{1}{m}$ si trasporti nel secondo *membro* dell'

(265) Leonardo Euler nel luogo citato dalla *Nota* 89, e dietro di lui il numero 9. nel suo principio.

(266) $\int\frac{dz}{lz}$ *nullis adhuc artificiis neque per logarithmos ..... exhiberi potuit* (Luogo e passo citato poco sopra nella *Nota* 260.) Egli nuovamente discorse di ciò nel Tom. XIX. dei *nuovi Commentarj* di Pietroburgo per l' anno 1774. editi del 1775. *Cum sæpius mihi occurrissent Formulæ differentiales .... veluti* $\frac{P\int z}{lz}$ *nunquam perspicere potui, ad quodnam genus quantitatum earum integralia sint referenda* = (pag. 66.) =.

(267) *Volumen primum Institutionum Calculi Integralis Coroll.* 3. al §. 311. e pag. 211.

dell' Equazione, e dall' altro Teorema nella medesima supposizione di $m = \infty$ (268), che stabilisce generalmente $L\left(\frac{x(mx+1)}{m+1}\right) = 2\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \frac{1}{m+4} + \ldots\ldots + \frac{1}{mx}\right)$, o sivvero posto $x = 2$ conduce all'Equazione medesima $\frac{1}{2} L\left(\frac{2(2.\infty+1)}{\infty+1}\right) = \frac{1}{2}L4$

$$= L2 = \frac{1}{\infty+1} + \frac{1}{\infty+2} + \frac{1}{\infty+3} + \frac{1}{\infty+4} + \ldots\ldots + \frac{1}{2.\infty}.$$

Altra pruova del preaccennato Teorema l'ò letta nella I. Parte del Tomo II. degli *Atti* della Società Italiana, e si deve all'eruditissimo Padre Gregorio Fontana (269). Ragionerò più diffusamente di questo Teorema elegante nel mio *Diporto Analitico* (270), derivandolo con altre Serie di simil sorte dalle proposizioni notissime di Mr. Giovanni di Beaugrand e del P. Cavalieri, e da $0.\infty = 1$ trattandosi dell' Infinito *ordinario*, siccome ò detto più volte di sopra (271). In cosa però di tanta importanza, qual' è quella di veder più oltre dell'Euler nell'argumento di cui parliamo, [quantunque l'Istoria delle Scienze consolantemente ci annunzi avere sbagliato anche Newton (272)], e nel dubbio che maneggiando delle Serie infinite possano introdursi delle fallacie nel cal-

(268) Tomo citato nel *Corollario* al §. 324. ed alla pag. 223. Altra dimostrazione elegantissima fu dipoi inserita dall' Euler nel Tom. XIX. dei *Commentarj nuovi* di Pietroburgo al §. 5, pag. 69. e 70. In quest' istesso Volume (§.3.p.68.) esiste la sua Formola $\int\frac{(z-1)dz}{Lz} = L2$, che mostrerò nel mio *Diporto Analitico* non opporsi forse al mio presente ritrovamento. Ma prima di tutto si veda il Tomo VII. indicato dalla *Nota* 301.

(269) *Sopra l' Equazione d' una Curva, sopra la falsità di due famosi Teoremi, e sopra le Serie Armoniche a termini infinitamente piccioli.* (Si veda specialmente dalla pag. 138. a 141).

(270) Ivi noterò molte altre di queste Serie, alcune delle quali verranno ancora poco sotto accennate. Parlerò nel luogo medesimo dei metodi di Mac-Laurin, Euler, Malfatti &c. usati a questo proposito. (*Nota* 11.).

(271) *Exercitationes Geometricæ sex, Auctore F. Bonaventura Cavalerio Mediolanensi &c.*, stampate in Bologna del 1647. Nella IV. egli parla *de Potestatibus Cossicis seu Algebraicis*, e particolarmente alle pag. 244. e segg., 283. e segg.

(272) Forse non sarebbero ancora nati i Cannocchiali *acromatici*, se la divisa delle Scienze non fosse stata, e non dovesse sempr' essere *Nullius in verba*.

Calcolo, onde senz'avvedersene si vada lungi dal vero (273), ò giudicato a proposito di confermare per altre parti lo scioglimento e valore suddivisato del *termine generale*. Primieramente osservo che nell' istesso Volume V. degli *Atti* antichi dell' Imperiale Accademia di Pietroburgo (274) venne determinata dall'Euler come *termine sommatorio* della Serie *armonica* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ &c. (de' cui *termini* sia l'*indice* n, ed il *termine generale* $\frac{1}{n}$) la Funzione .... $\int\frac{1-x^n}{1-x}\,.\,dx$, che nella solita integrazione supposta estendersi unicamente da $x=0$ sino a $x=1$. Inferisco da ciò che mentre l'*indice* $n=\infty$, debba nascerne $\int\frac{1-x^\infty}{1-x}\,.\,dx=\int\frac{dx}{1-x}-\int\frac{x^\infty\,.\,dx}{1-x}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\ldots\ldots+\frac{1}{\infty}=\infty$ *Armonico*, ed in conseguenza $\int\frac{x^\infty dx}{1-x}=\int\frac{dx}{1-x}-\infty$ *Armonico* $=-L(1-x)-\infty$ *Armonico* $=-L\,0-\infty$ *Armonico* nel caso di $x=1$, e finalmente $=\infty$ *Armonico* $-\infty$ *Armonico*; Equazione vaga, ed indeterminata (275). A fine perciò di determinarla rifletto che $\int\frac{dx}{1-x}-\int\frac{x^\infty dx}{1-x}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}+$ &c. $-\ldots\ldots$ $\left(\frac{x^{\infty+1}}{\infty+1}+\frac{x^{\infty+2}}{\infty+2}+\frac{x^{\infty+3}}{\infty+3}+\frac{x^{\infty+4}}{\infty+4}+\frac{x^{\infty+5}}{\infty+5}+\frac{x^{\infty+6}}{\infty+6}+\right.$

(273) L'Istoria Naturale, la Medicina, la Politica &c. ànno, come ognun sà, i loro *romanzi*. Gli ànno parimente le Matematiche miste, e soprattutto l'Idrometria, ed anche di freschissima data. Parrebbe che non dovessero aver mai luogo nelle Matematiche pure. Contuttociò se n'incontrano, ma molto più radi.

(274) Vedasi la *Dissertazione* citata nella *Nota* 66. (al §. 4. pag. 92. 93.).

(275) *Nota* 63 Si consulti ancora l'Eccellente Capitolo XV. *De valoribus Functionum, qui certis casibus videntur indeterminati* delle Institutioni di Calcolo Differenziale dell' Euler.

$\left.\frac{x^{\infty+7}}{\infty+7} + \&c.\right)$, e vale a dire nel caso nostro $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \&c. - \left(\frac{1}{\infty+1} + \frac{1}{\infty+2} + \frac{1}{\infty+3} + \frac{1}{\infty+4} + \frac{1}{\infty+5} + \frac{1}{\infty+6} + \frac{1}{\infty+7} + \&c.\right)$. Sarà dunque la differenza di queste due ultime Serie $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \&c.$ laonde $\frac{1}{\infty+1} + \frac{1}{\infty+2} + \frac{1}{\infty+3} + \frac{1}{\infty+4} + \frac{1}{\infty+5} + \frac{1}{\infty+6} + \frac{1}{\infty+7} + \ldots\ldots + \frac{1}{2.\infty}$ deve essere di tal valore, che sotttratto da $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{\infty}$ rigeneri questa medesima Serie. Ora è facile di concepire che questa rigenerazione perfetta (276) non possa aver luogo eccettochè facendo $\frac{1}{\infty+1} + \frac{1}{\infty+2} + \frac{1}{\infty+3} + \frac{1}{\infty+4} + \frac{1}{\infty+5} + \frac{1}{\infty+6} + \frac{1}{\infty+7} + \ldots\ldots + \frac{1}{2.\infty} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \&c. = L2$, a motivo che $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \&c.\right) - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \right.$

(276) Chi andasse dietro dell'orme segnate dal P. Abate Grandi nello *Scolio* (del Corollario 3. della VII. Proposizione), che da pag. 29. arriva sino a tutta la 34. della seconda edizione del suo Libro *De quadratura Circuli & Hyperbolæ*, dove si applicò a spiegare matematicamente la creazione del Mondo mediante le Serie *parallele* conducenti all'Equazione $0 . \infty = \frac{1}{2}$, potrebbe oggi coll'istesso diritto dalla *rigenerazione* dell'Infinito Armonico, cui venga tolta una parte finita, aver l'ardimento di spiegar come l'impareggiabile intensità dell'Onnipotenza non siasi punto diminuita dopo la formazione dell'Universo. Leonardo Euler dà però la prima scoperta della Serie *parallele* $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \&c. = \frac{1}{2}$ al gran Leibnitz (luogo citato in fondo della *Nota* 220. al §. 3. e pag. 206.).

$\frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \&c. \Big) = \frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{6} + \frac{2}{8} + \frac{2}{10} + \frac{2}{12} + \frac{2}{14} + \&c. = 1 + \frac{1}{2}$ $+ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \&c.$ Ecco dunque determinata l' Equazione superiore ∞ *Arm.°* $- \infty$ *Arm.°* $= m'$; ecco pruovato che questa differenza pareggi il L2, trovata nel caso, di cui si parla, l'egualità rigorosa di ∞ *Arm.°* $= \infty$ *Arm.°* $\pm$ L2, confermata l' altra Equazione $\frac{1}{\infty+1} + \frac{1}{\infty+2} + \frac{1}{\infty+3} + \frac{1}{\infty+4} + \frac{1}{\infty+5} + \frac{1}{\infty+6} + \frac{1}{\infty+7} + \ldots\ldots + \frac{1}{2.\infty} =$ L2 con un modo affatto nuovo di dimostrarla, avvalorata la prima $\int \frac{x^{\infty}\, dx}{1-x} =$ L2 quando $x=1$, ed esposto un esempio d'aritmetica *palingenesia*, che può condurre a delle maraviglie senza pari, soggettandola sempre però al dominio eminente della ragione (277). Di quì pare che non s' intenda come applicata la regola Newtoniana, di cui ci siamo sempre serviti di sopra, e con tutto il profitto (278), alla Formola $\int \frac{x^{\infty}\, dx}{1-x}$, comparisca sterile adesso, pericolosa, e forse ancora contradittoria colle cose premesse. Vuole (279) quella *regola* infatti che $\int x^{\infty}\, dx\left(1-x\right)^{-1}$: $\int dx\left(1-x\right)^{-1} :: \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{6}{6} \cdot \frac{7}{7} \cdot \ldots\ldots \frac{\infty}{\infty} : 1$ nel caso di $x=1$, cioè $\int x^{\infty}\, dx\left(1-x\right)^{-1} = \int dx\left(1-x\right)^{-1}$, che vorrebbe significare L2 $=$ L ∞; conseguenza sicuramente falsa, e rigettabile per tutti i titoli. Ma in primo luogo la regola non può adattarsi al caso presente, perchè manca la condizione di $l+1$ eguale ad un *numero positivo* (280), essendo $l=-1$, e perciò $-1+1=0$. Si fa dunque ne-

(277) *Opinionum commenta delet dies, naturæ judicia confirmat.*
(278) Si veda pressochè intiero il II. §.
(279) Luogo delle Flussioni di Mac-Laurin additato principalmente dalla *Nota* 139.
(280) Luogo citato all'ultimo verso della pag. 219.

necessaria l' aggiunta della *costante* (281), ed allora ne siegue $L\infty \pm L2 = L\infty$; e questo non è più nè mistero nè *paradosso* in forza delle riflessioni avanzate. Lo che tantopiù acquieta ed appaga lo spirito mentre si avverta a quella bellissima proprietà, di cui godono le due Serie infinite $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} +$ &c., e $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} +$ &c., ed è che la prima sia eguale a $2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \&c.\right)$ come risulta dalla sua rigenerazione, e perciò eguale ancora a $2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \&c.\right)$ come mostrò agevolmente Jacopo Bernoulli (282), ed io ricavai dai soli principj della Geometria (283); d'onde ne nasce $\pm L2 = \pm \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \&c.\right)$ da considerarsi alla pari dello *zero* in confronto di $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} +$ &c. o sivvero dell' Infinito *armonico* $L\infty = -L0$, che altri nominano *paradosso* (284). Ma trattando d'una Funzione differenziale $\frac{x^{\infty}\,dx}{1-x}$, la quale è il limi-

(281) In un caso simile Leonardo Eulero si espresse così. *Hîc autem notari debet hunc casum & alios, quibus e+1 fit numerus negativus, non posse ex generali deduci .... post integrationem enim constans infinita est adiicienda.* (Pag. 43. del Tom V. dei vecchi *Atti* dell'Imperiale Accademia di Pietroburgo).

(282) Al num. XXIV. del Volume I. = *Jacobi Bernoulli Opera = Genevæ* 1744. L' istesso stabilì ancora Giovanni Bernoulli (*Opera* ANEKΔOTA al num. CL *De seriebus varia* nel Tomo IV. della *Raccolta &c.*).

(283) *Magnitudinum exponentialium &c.* Cap. VI. §. 257. e pag. 344.

(284) In sostanza non è altro che l' Area asintotica dell'Iperbola Apolloniana *equilatera* paragonata al Rettangolo 1+1+1+1+1+1+1+1+ &c., dell' Ordinata 1 nell' infinito Asintoto. (Ved. le *Note* 82. 83. 84. 85.).

limite dell'altra $\frac{x^r dx}{1-x}$, e questa essendo della classe delle *Frazioni razionali* integrate generalmente da Giovanni Bernoulli sino del M. DCC. II. (285), vediamo se risolvendola secondo il metodo comunemente usato dagli Algebristi vadano i suoi risultati d' accordo co'i primi. Seguitato adunque il metodo Bernoulliano, e calcate l' orme medesime di Leonardo Euler (286), e più puntualmente di Samuello Vince (287), abbiamo $\int \frac{x^r dx}{1-x} = \int dx \left(-x^{r-1} - x^{r-2} - x^{r-3} - x^{r-4} - x^{r-5} - x^{r-6} - \&c.\ x^{r-r} + \frac{1}{1-x}\right)$; onde posto $r = \infty$, si conseguisce $\int \frac{x^\infty dx}{1-x} = -\frac{x^\infty}{\infty} - \frac{x^{\infty-1}}{\infty-1} - \frac{x^{\infty-2}}{\infty-2} - \frac{x^{\infty-3}}{\infty-3} - \frac{x^{\infty-4}}{\infty-4} - \frac{x^{\infty-5}}{\infty-5} - \&c. - L(1-x)$, ch'è quanto dire nel caso di $x=1$ della soggetta materia, $\int \frac{x^\infty dx}{1-x} = -\left(\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty-1} + \frac{1}{\infty-2} + \frac{1}{\infty-3} + \frac{1}{\infty-4} + \frac{1}{\infty-5} + \frac{1}{\infty-6} + \frac{1}{\infty-7} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{\infty-(\infty-1)}\right) - L0$, cioè roversciato l' ordine della Serie $= -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \&c.\ldots + \frac{1}{\infty-2} + \frac{1}{\infty-1} + \frac{1}{\infty}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \&c.\ldots + \frac{1}{\infty-2} + \frac{1}{\infty-1} + \frac{1}{\infty}\right)$, o sivvero eguale a quell'istessa differenza vaga ed indefinita dei due Infiniti *Armonici*, che mi è di sopra riescito di decifrare e determinare. A maggior lume di ciò sperimentiamo quel che sarebbe il *limite* di

(285) *Solution d'un Pròbleme concernant le Calcul Intégral* nel Tomo della R. Accademia delle Scienze di Parigi per l'Anno indicato a pag. 296. (Volume I. delle sue Opere al num. LXX. e pag. 393.).

(286) *Institutionum Calculi Integralis Volumen I.* P. I. S I. L. I. C. III. alle pag. 93. e 101. §§. 139. 140. e 157.

(287. Nella *Memoria* descritta dalla *Nota* 125. all' Articolo IV. e pag. 437. (Malfatti nel Tom. IV. dei nuovi della R. Società di Torino a pag. 100, posto $m=1$, $n=\infty$.).

di $\int\frac{x^n dx}{1+x}$, e vale a dire il valore di $\int\frac{x^\infty dx}{1+x}$, andando per l'istesso cammino dei metodi precedenti. E' manifesto a chiunque che il primo Integrale si sciolga nelle sue parti così; $\int\frac{x^n dx}{1+x} =$

$$\int\left(x^{n-1}dx - x^{n-2}dx + x^{n-3}dx - x^{n-4}dx + x^{n-5}dx - \&c. \ldots \pm \frac{dx}{1+x}\right),$$

ed in altra maniera consimile a quella, che ò praticata poc' anzi, $\int\frac{x^n dx}{1+x} = \int\left(x^n dx - x^{n+1} dx + x^{n+2} dx - x^{n+3} dx + x^{n+4} \ldots\ldots dx - x^{n+5} dx + \&c. \ldots\ldots \pm x^{n+\infty} dx\right)$. Quindi è che nel solito caso di $x=1$, e posto $n=\infty$, abbiasi $\int\frac{x^\infty dx}{1+x} = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty-1} + \frac{1}{\infty-2} - \frac{1}{\infty-3} + \frac{1}{\infty-4} - \frac{1}{\infty-5} + \frac{1}{\infty-6} - \frac{1}{\infty-7} + \&c. \ldots \pm L2$, e parimente $= \frac{1}{\infty+1} - \frac{1}{\infty+2} + \frac{1}{\infty+3} - \frac{1}{\infty+4} + \frac{1}{\infty+5} - \frac{1}{\infty+6} + \frac{1}{\infty+7} - \ldots\ldots \pm \frac{1}{2.\infty}$. O si assuma perciò l' Infinito ordinario ∞ come *limite* dei numeri *pari* o *dispari*, viene ad essere nell' uno e nell' altro caso (per quanto a me pare) $\int\frac{x^\infty dx}{1+x} = L2 - L2 = 0$; dimodochè quello *zero*, che sarebbe vago ed indeterminato nella seconda Equazione, si determini e definisca mediante la prima, e si prestino mutuo soccorso tra loro e s' illuminino e s' avvalorino di concerto le due Equazioni medesime. Leggendo la profonda *Memoria* sul Calcolo Integrale d' Eduardo Waring, ch' è nel Volume LXXVI. delle *Transazioni* di Londra (288), trovo l' Equazione se-

(288) *On infinite Series* = *Read Decembre* 15, 1785. = E nella I. Parte del Tomo stampato del 1786. al num. IV. dalla pag. 81. sino alla 118, divisa in tre parti. Si veda specialmente l'*Esempio* 3. a pag. 85.

seguente generalissima da lui dimostrata $\int \frac{x^m\, dx}{1+x} = \frac{x^{m+1}}{1+x}$ .....

$$\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1\,.\,m+2} \left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{2}{m+1\,.\,m+2\,.\,m+3} \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \ldots \ldots \frac{2\,.\,3}{m+1\,.\,m+2\,.\,m+3\,.\,m+4} \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \&c. \right)$$

, della quale parlerò molto a lungo nel mio *Diporto Analitico*. Ma frattanto non posso astenermi dall' osservare che rinnuovata l' ipotesi di $m = \infty$, e $x = 1$, quell' Equazione diventi

$$\int \frac{x^\infty\, dx}{1+x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\infty+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\infty+1\,.\,\infty+2} + \frac{1}{2^2}\cdot \frac{1\,.\,2}{\infty+1\,.\,\infty+2\,.\,\infty+3} + \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1\,.\,2\,.\,3}{\infty+1\,.\,\infty+2\,.\,\infty+3\,.\,\infty+4} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots n}{\infty+1\,.\,\infty+2\,.\,\infty+3\,.\,\infty+4\,.\,\infty+5\ldots\,.\infty+(n+1)} \ldots\ldots + \frac{1}{2^\infty}\cdot\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots n\ldots\infty}{\infty+1\,.\,\infty+2\,.\,\infty+3\,.\,\infty+4\,.\,\infty+5\ldots\ldots\infty+(n+1)\ldots\ldots 2\,.\,\infty+1} \right)$$

. Adesso ognun vede che il primo termine della Serie sia un' infinitamente-piccolo del prim' ordine, quello che siegue del secondo, indi del terzo, e così discorrendo dei successivi, rispetto ai quali il termine n^{esimo} è sempre dell' ordine 0^n. L' ultimo termine poi per le dimostrazioni di già spiegate nel Num. 3. e nel 4. consecutivo, non meno che in virtù del *fattore* infinitamente-piccolo $\frac{1}{2^\infty}$, è sicuramente ancor esso infinitesimo. Da questa analisi della Serie di Waring mi sembra perciò che risulti con tutta evidenza ch' essa equivaglia allo *zero* nel caso proposto, d' onde nasce quella conferma, alla quale miravo, portandola in pruova de' miei pensieri.

29 Fermato adunque che il termine della Serie Euleriana corrispondente all' indice -1 sia L2, tutti gli altri, che spettino ad *indici* interi *negativi*, si trovano colla massima facilità. Euler n' à spianata la Strada, e per comporre la *Tavoletta* seguente mi son servito delle sue Formole (289).

In-

(289) Capo IV. §§. 217. e 218. pagg. 133. e 134. del Tom. I. *Institutionum Calculi Integralis*, supponendo $m=1$, e $Lx=-Lz$.

Indici -1 | Termini $\int x^{\infty}\,dx(1-x)^{-1}=\int dz(-Lz)^{-1}=\frac{L2}{1}$

-2 | $\infty^{-1}\int x^{\infty}\,dx(1-x)^{-2}=\int dz(-Lz)^{-2}=-\frac{(\infty+L2)}{1.1}$

S' intende sempre -3 | $\infty^{-2}\int x^{\infty}\,dx(1-x)^{-3}=\int dz(-Lz)^{-3}=\frac{(\infty^2+\infty+L2)}{1\,.\,2}$

$x=1$, -4 | $\infty^{-3}\int x^{\infty}\,dx(1-x)^{-4}=\int dz(-Lz)^{-4}=-\ldots\ldots\frac{(2\,\infty^3+\infty^2+\infty+L2)}{1\,.\,2\,.\,3}$

$z=1$ ....

$-n$ | $\infty^{-(n-1)}\int x^{\infty}\,dx(1-x)^{-n}=-\int dz(Lz)^{-n}=\pm\left(\frac{\infty n-1}{n-1}+\right.$

$\frac{\infty^{n-2}}{n-1\,.\,n-2}+\frac{\infty^{n-3}}{n-1\,.\,n-2\,.\,n-3}+\frac{\infty n-4}{n-1\,.\,n-2\,.\,n-3\,.\,n-4}+\ldots\ldots+$

$\left.\frac{L\,2}{n-1\,.\,n-2\,.\,n-3\,.\,n-4\,.\,n-5\,\ldots\ldots 1}\right)$, valendo il segno *positivo* mentre n sia *impàri*. e *negativo* se *pari*, e contando i *denominatori* ed i *termini* sino a tanto che non s' incontri lo *zero*. Sono alternativi perciò i *segni* di questa Serie, e sarebbero tutti *negativi* restando fermi gli istessi valori dei *termini*, qualora si cercassero all' incontro per l'altra Serie $\int dz(Lz)^{-1}, \int dz(Lz)^{-2}, \int dz(Lz)^{-3}, \int dz(Lz)^{-4}$, ..., $\int dz(Lz)^{-n}$, ch' è quella appunto somministrata dall' Euler ad imitazione ed in supplemento della celebre Bernoulliana (290), nella quale in proposito dei *segni* accade tutto l' oppo-sto

---

(290) Questa si legge nel §. 211. e pag. 130. del Tomo poc' anzi citato. Vedasi il num. 8. ed il §. 218. accennato dalla precedente *Nota*.

sto (291). Che per il caso di x e $z=1$ abbiano l' istesso valore $\infty^{-(n-1)}\int x^{\infty}dx(1-x)^{-n}$ e $\int dz(-Lz)^{-n}$ si prova come ò mostrato nel Num. 10. quand' era l' *indice positivo*, e nel precedente essendo -1. Imperocchè $\infty^{-(n-1)}\int x^{\infty}dx(1-x)^{-n} = \int \frac{\infty . x^{\infty-1}}{\infty^{n}} \ldots\ldots$ $dx\left(1-(x^{\infty})^{0}\right)^{-n} = \int d(x^{\infty}) . \frac{1}{0^{-n}}\left(1-(x^{\infty})^{0}\right)^{-n} = \int d(x^{\infty})\left(\frac{1-(x^{\infty})^{0}}{0}\right)^{-n}$ $= \int d(x^{\infty})\left(-L(x^{\infty})\right)^{-n} = \int dz(-Lz)^{-n}$, posto $z = x^{\infty}$ a forma dei precetti suddivisati. L' infinito, che appare nella *Tavoletta* superiore, è l' *ordinario* da me più volte per l' avanti consideraro; ed è notabile che il metodo sopr'esposto, non contento di far conoscere le più alte *potenze* dell' Infinito medesimo, che sono l' inverse di quelle del *modulo*, o sivvero dotate d' *esponenti* minori sempre d' un' *unità* dell' *indice n* somministri di più tutte le altre *potenze* di minor grado, e perfino le grandezze *finite*, onde avere sott' occhio coacervate minutamente e cumulate insieme tutte le parti, le quali compongono il preciso valore dei *termini* ricercati. E' ben vero però che tranne il primo *termine* finito perchè $= L2$, e trascurate come si deve le parti infinitamente minori della prima, qualunque dei termini della Serie nella numerazione degli *indici negativi* come $\infty^{-(n-1)}\int x^{\infty}dx(1-x)^{-n} = \int dz(-Lz)^{-n} = \pm \frac{\infty^{n-1}}{n-1}$. Nè manca d' eleganza il vedere che nel modo medesimo, in virtù del quale ogni *termine* dalla parte degli *indici positivi* come ∞^{n+1} $\int x^{\infty}dx(1-x)^{n} = \int dz(-Lz)^{n} = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6. \ldots\ldots\ldots n$, non diversamente ciaschedun *termine* dalla parte degli *indici negativi* come $\infty^{-n+1}\int x^{\infty}dx(1-x)^{-n} = \int dz(-Lz)^{-n}$ faccia ricomparire nel suo *denominatore* l' istessa Serie $1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6. \ldots\ldots\ldots (n-1)$, ch' è quanto dire inversa, e solamente mutilata di n ultimo dei *fattori*, essen-

(291) Coroll. 1. e 2. §§. 212. 213. del Tomo medesimo alle pag. 130. e 131.

essendo evidente che 1. 2. 3. 4. 5. 6. . . . . . $(n-1) = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$ . . . . . 1. Anzi se paragoneremo tra loro i valori dei due Integrali $\int x^{\infty} dx (1-x)^n$, $\int x^{\infty} dx (1-x)^{-(n+1)}$, troveremo che il primo sia $= \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ \ldots\ldots n}{\infty^{n+1}}$ ed il secondo $= \pm \frac{1}{n}$, cioè il primo sempre infinitamente-piccolo dell' ordine $n+1$, il secondo sempre finito, e *positivo* se *n pari*, *negativo* se *impari* (292). Ora s' intende come si passi dai valori infinitesimi di questi Integrali [sempre nel caso di $x = 1$] ai finiti. S' intende ancora come proceda dall' *indice* o in poi per la parte dei negativi la Serie Euleriana: imperocchè all' *indice* o corrisponde il *termine* 1, a $-\frac{1}{2}$ il termine $\sqrt{c}$, a -1 il *termine* L2, e vale a dire in numeri prossimi 1.000000, 1.772454, 0.693147, dopo del qual' ultimo *termine* decrescendo viapiù i *termini*, che ne succedono *intercalati*, ve n' à uno finalmente che si fà *zero*, e quindi passano ad avere un valor *negativo*, ed anche *infinito* quando l' *indice* diventi -2. Si repetono questi passaggi dei *termini* per lo *zero* tra tutti gli altri *indici* -2, e -3, -3, e -4, ..., $-n$, e $-(n+1)$, perchè cambiano sempre ed alternativamente di *segno* i loro valori infiniti. V' à un *massimo* almeno di *termini* tra l' *indice* o, e -1. Assegnar l' *indice negativo*, che attenga a questo *termine massimo*, star dietro all' andamento di quella Curva composta di varj Rami infiniti, le cui *ordinate* siano i *termini* della Serie Euleriana, e le *ascisse* gli *indici negativi* (293) [poichè dalla parte dei *positivi* la traccia della Curva per punti è ben semplice in virtù del II. §.], definire quali siano i valori degli *indici negativi*, cui corrispondono le intersezioni della medesima Curva coll' Asse delle sue *ascisse* o sivvero i passaggi delle *ordinate* mediante lo *zero* dal *negativo* al *positivo* &c., sarebbero specolazioni amenissime; ma a fine di raccoglierle tutte ed illuminarle ci vorrebbe un Trattato. Dirò solo che mentre sian vere le proposizioni dedotte in questo Numero e nel precedente, abbiasi per Corollario la bella Serie seguente, posto $x = 1$ come sopra,

$$\int \frac{x^{\infty} dx}{(1-x)^1} + \int \frac{x^{\infty} dx}{(1-x)^2} + \int \frac{x^{\infty} dx}{(1-x)^3} + \int \frac{x^{\infty} dx}{(1-x)^4} + \int \frac{x^{\infty} dx}{(1-x)^5} + \int \frac{x^{\infty} dx}{(1-x)^6} + \int \frac{x^{\infty} dx}{(1-x)^7} + \int \frac{x^{\infty} dx}{(1-x)^8} + \ldots\ldots + \int \frac{x^{\infty} dx}{(1-x)^n} + \ldots + \int \frac{x^{\infty} dx}{(1-x)^{\infty}} = L2$$

(292) Si veda il num. 22. e si paragoni col principio di questo ossia colla *Tavola* antecedente.

(293) Num. 27. e *Tavola* citata di sopra.

$= L2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{12}$ &c. $= L2 - L2 = 0 =$

$\int \frac{x^{\infty} dx}{1+x}$, siccome è facile di ravvisare, di quì nascerebbero moltissime conseguenze ed applicazioni a questa branca di Calcolo Integrale, che s'occupa dei *limiti* di Differenziali *razionali*, poco o niente sino ad ora trattata dai Matematici. Di qui molte Serie *false* [perchè *divergenti*] composte di termini parte infinitamente piccoli, e parte finiti, ed infiniti, o unicamente *vere* nel senso analitico e astratto, in cui piacque considerare le Somme di tutte le Serie Infinite al grand' Euler (294). Per esempio

$$\frac{1}{\infty+1} + \frac{2}{\infty+2} + \frac{3}{\infty+3} + \frac{4}{\infty+4} + \frac{5}{\infty+5} + \frac{6}{\infty+6} + \frac{7}{\infty+7} + \ldots + \frac{\infty}{2.\infty} = -1$$

$$\frac{1}{\infty+1} + \frac{3}{\infty+2} + \frac{6}{\infty+3} + \frac{10}{\infty+4} + \frac{15}{\infty+5} + \frac{21}{\infty+6} + \frac{28}{\infty+7} + \ldots + \frac{\infty^2}{4.\infty} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\infty+1} + \frac{4}{\infty+2} + \frac{10}{\infty+3} + \frac{20}{\infty+4} + \frac{35}{\infty+5} + \frac{56}{\infty+6} + \frac{84}{\infty+7} + \ldots + \frac{\infty^3}{12.\infty} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{\infty+1} + \frac{5}{\infty+2} + \frac{15}{\infty+3} + \frac{35}{\infty+4} + \frac{70}{\infty+5} + \frac{126}{\infty+6} + \frac{210}{\infty+7} + \ldots + \frac{\infty^4}{48.\infty} = \frac{1}{4}$$

. . . .

e così procedendo senza fine per mezzo di *numeratori*, che sieno i Numeri *figurati* [compresi ancora i *monadici*, che sono quelli attenenti alla Serie provata di sopra eguale a L2], cioè *laterali*, *triangolari*, *piramidali*, *triangolo-triangolari*, *piramido-triangolari &c.* in infinito (295). Di quì deriva l' altra bellissima Serie composta d' infinite altre Serie a termini infinitesimi e perfettamente sommabile,

N ij $\frac{1}{\infty+1}$

(294) *Nota* (48). Segnatamente nel luogo ivi citato si consulti a *Tavola* delle Serie al §. 3. e pag. 85.

(295) Wallis prese questi nomi dalla *Clavis Mathematica* di Oughtred. (Ved. la *Nota* 50.).

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1}{\infty+1}+\frac{1}{\infty+2}+\frac{1}{\infty+3}+\frac{1}{\infty+4}+\frac{1}{\infty+5}+\frac{1}{\infty+6}\\
\quad+\frac{1}{\infty+7}+\ldots+\frac{1}{2.\infty}\\
+\frac{1}{2.\infty+1}+\frac{1}{2.\infty+2}+\frac{1}{2.\infty+3}+\frac{1}{2.\infty+4}+\frac{1}{2.\infty+5}\\
\quad+\frac{1}{2.\infty+6}+\frac{1}{2.\infty+7}+\ldots+\frac{1}{3.\infty}\\
+\frac{1}{3.\infty+1}+\frac{1}{3.\infty+2}+\frac{1}{3.\infty+3}+\frac{1}{3.\infty+4}+\frac{1}{3.\infty+5}\\
\quad+\frac{1}{3.\infty+6}+\frac{1}{3.\infty+7}+\ldots+\frac{1}{4.\infty}\\
+\frac{1}{4.\infty+1}+\frac{1}{4.\infty+2}+\frac{1}{4.\infty+3}+\frac{1}{4.\infty+4}+\frac{1}{4.\infty+5}\\
\quad+\frac{1}{4.\infty+6}+\frac{1}{4.\infty+7}+\ldots+\frac{1}{5.\infty}\\
+\frac{1}{5.\infty+1}+\frac{1}{5.\infty+2}+\frac{1}{5.\infty+3}+\frac{1}{5.\infty+4}+\frac{1}{5.\infty+5}\\
\quad+\frac{1}{5.\infty+6}+\frac{1}{5.\infty+7}+\ldots+\frac{1}{6.\infty}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{\infty}$$

Di quì parimente risulta $\frac{1}{\infty^2+1}+\frac{1}{\infty^2+2}+\frac{1}{\infty^2+3}+\frac{1}{\infty^2+4}+\frac{1}{\infty^2+5}+\frac{1}{\infty^2+6}+\frac{1}{\infty^2+7}+\ldots+\frac{1}{\infty^2+\infty}=0$, la qual Serie infinita progredisce nel modo ed ordine istesso di quella considerata prima di tutte come uguale a L2 nel Numero antecedente.

30. Sino adesso ò poste in uso, all' effetto di conseguire l' integrazione di $\int dx(\pm Lx)^{\pm n}$, tanto le Formole di Giovanni Bernoulli,

li, quanto quelle di Leonardo Euler (296) piuttosto indirette anzichè nò, come appoggiate al modo d'integrare per successivo *defalco* di *parti*. In aumento di ciò, che scrissero sopra di questo soggetto analitico Halley e Foncenèx (297), posseggo da lungo tempo la maniera diretta d'integrare siffatti *differenziali* logaritmici non diversamente dai *differenziali* delle *potenze*. Basterà un *saggio* per farla intendere, e questo *saggio* vado applicandolo unicamente a $\int dx(-Lx)^n$ ben sapendosi che accada l'istesso di $\int dx(Lx)^n$ colla sola differenza alcuna volta dell' alternativa dei *segni* nei termini della *Somma*. Ecco in breve il prospetto del nuovo metodo.

$$\int dx(-Lx)^o = \int dx\left(\frac{1-x^o}{o}\right)^o = \frac{x}{o^o} = \frac{x}{1} = x$$

$$\int dx(-Lx)^1 = \int dx\left(\frac{1-x^o}{o}\right)^1 = \frac{x}{o} - \frac{x^{o+1}}{o(o+1)} = \frac{1}{o}\left(\frac{o.x+x)(1-x^o)}{1}\right) = x\left(\frac{1-x^o}{o}\right) + x$$
$$= x(-Lx)+x$$

$$\int dx(-Lx)^2 = \int dx\left(\frac{1-x^o}{o}\right)^2 = \frac{x}{o^2} - \frac{2x^{o+1}}{o^2(o+1)} + \frac{x^{2.o+1}}{o^2(2.o+1)} = \frac{x}{o^2}\left(\frac{2.o^2+3.o+1-(4.o+2)x^o+(o+1)x^{2o}}{(o+1)(2.o+1)}\right) = \frac{x\left(\frac{1-x^o}{o}\right)^2 + o.x\left(\frac{1-x^o}{o}\right)^2 + 2x\left(\frac{1-x^o}{o}\right) + 2x}{1}$$
$$= x(-Lx)^2+2x(-Lx)+2x$$

$$\int dx(-Lx)^3 = \int dx\left(\frac{1-x^o}{o}\right)^3 = \frac{x}{o^3} - \frac{3x^{o+1}}{o^3(o+1)} + \frac{3x^{2.o+1}}{o^3(2.o+1)} - \frac{x^{3.o+1}}{o^3(3.o+1)} = \frac{x}{o^3}$$
$$\left(\frac{6.o^3+11.o^2+6.o+1-(18.o^2+15.o+3)x^o+(9.o^2+12.o+3)x^{2.o}-(2.o^2+3.o+1)x^{3.o}}{(o+1)(2.o+1)(3.o+1)}\right)$$
$$= \frac{x\left(\frac{1-x^o}{o}\right)^3 + o.3x\left(\frac{1-x^o}{o}\right)^3 + o^2.2x\left(\frac{1-x^o}{o}\right)^3 + 3x\left(\frac{1-x^o}{o}\right)^2 + o.3x\left(\frac{1-x^o}{o}\right)^2 + 6x\left(\frac{1-x^o}{o}\right) + 6x}{1}$$

$= x(-Lx)^3+3x(-Lx)^2+6x(-Lx)+6x$, e così discorrendo di tutti gli altri. Dunque la teoria della Serie Euleriana, e di quelle che ne dipendono, quando ancora dovesse essere stabilita sù

 del-

(296) Sia letto di nuovo il num. 8.
(297) *Note* 97. e 99.

delle Formole logaritmiche verrebbe così a derivare dai soli *differenziali* delle *potenze*, e vale a dire dai primi elementi del Calcolo. Oltre di veder quì confermato il valore di $0^0 = 1$, è fuori di dubbio che nella nuova Formola (non diversamente dalle considerazioni fatte nel Num. 8.) posto $x = 0$ abbiasi $\frac{1-x^0}{0} = \frac{1-0^0}{0} = \frac{1-1}{0}$ $= \frac{0}{0} = \infty$, cioè all'Infinito *armonico*. Imperocchè il valore vago $\frac{0}{0}$ si determina facilmente osservando che $\frac{1-x^0}{0} = \frac{1-[1-(1-x)]^0}{0} = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} +$ $\frac{0(1-x)}{0} + \frac{0(1-x)^2}{2.0} + \frac{0(1-x)^3}{3.0} + \frac{0(1-x)^4}{4.0} + \frac{0(1-x)^5}{5.0} + \frac{0(1-x)^6}{6.0} +$ $\frac{0(1-x)^7}{7.0} + \&c. = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \&c.$ subitochè sia $x = 0$ secondo la preaccennata supposizione.

31. Tutta la Geometria delle Logistiche di vario grado si regge sulle precedenti dottrine. La loro Equazione generale è $y = (Lx)^n$ o sivvero $y^{\frac{1}{n}} = Lx$. Tradotta in figura di *esponenziali* acquista la forma di $e^{y^{\frac{1}{n}}} = x$, posta e la base dei logaritmi iperbolici. Divido tutte queste Logistiche in Paraboliche, ed Iperboliche: corrisponde alle prime l'*esponente n positivo*, e *negativo* alle seconde. Ognun vede che quando n sia 1 si faccia luogo alla Logistica Neperiana, e che il *limite* dividente le Paraboliche dalle Iperboliche venendo fissato dall'esponente $n = 0$, cioè dall'Equazione $y = (Lx)^0 = 1$, rappresenti una Linea retta parallela all'Asse della variabile x. Eccettuato questo solo caso, in tutti gli altri quelle Logistiche innumerevoli godono d'un Asintoto. Per trovare la *quadratura* di queste Aree asintotiche Lorenzo Lorenzini impiegò molto tempo e fatica colla sua Sintesi geometrica, e solamente arrivò ai due Teoremi seguenti (298), che si riducono in uno. = *Si exponens Logisticæ*

(298) Sono segnati 32. e 35., e l'ultimo è distinto di più col Numero in matita rossa 35. nel MS. alla Classe XI. Scansla 24. e Palchetto 4. della Libreria pubblica Fiorentina Magliabechiana, il quale à per titolo *Laurentii Lorenzini Opera Geometrica autographa*, e segnatamente nel Tomo III. *Exercitationes Geometricæ* all'*Esercitazione* II. *De infinitis Parabolis, Hyperbolis, & Logisticis*. Anche nell' *Eser-*

gisticæ submultiplex sit unitatis, dico quod proportio Spatii Logistici infinite longi ad rectangulum Axis in Parametrum componetur ex rationibus, quas habent ad exponentem omnes ipsius multiplices unitatem non excedentes $=$. $=$ *Si exponens Logisticæ submultiplex sit unitatis, dico quod Logisticum Spatium infinite longum se habebit ad rectangulum ex Axe in Parametrum ut productum ab omnibus numeris integris non excedentibus exponentis denominatorem ad unitatem* $=$. Ciò vuol dire secondo la generazione delle infinite Logistiche data dal Lorenzini, e prima dal Grandi (299), che posto $=1$ il *parametro* o termine di rapporto delle Ordinate y, e contate le Ascisse x da o sino ad 1, lo Spazio intero asintotico della Logistica, il cui esponente sia $\frac{1}{n}$, venga ad essere all' *unità* [Rettangolo del Parametro nell'Asse] in proporzione eguale alla ragione di $\frac{2}{n} . \frac{3}{n} . \frac{4}{n} . \frac{5}{n} . \frac{6}{n} \ldots\ldots \frac{n-1}{n} . \frac{n}{n} : \frac{1}{n}$, cioè $2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6 \ldots\ldots n-1 . n : 1$, o sivvero più brevemente e direttamente, nell'altra maniera di esporre il medesimo ritrovamento, come $1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6 \ldots\ldots n : 1$. Questo appieno concorda colle antecedenti Proposizioni: perocchè avendosi $y^n =$ Lx ossia $y = (\text{Lx})^n$, e dovendo contare x da o ad 1, ch'è quanto dire secondo i diversi valori dell' esponente n essendo l' Ordinata ora *positiva* ed ora *negativa*, la vera Equazione dell'Area corrispondente alla Curva dalla parte, in cui si accosta all'Asintoto, diventa $\pm \int y dx = \int dx (\text{L}x)^n$; e perciò volendolo considerar sempre come *positivo*, viene a farsi lo Spazio Asintotico dalla medesima parte $\int y dx = \int dx (-\text{L}x)^n = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6. \ldots\ldots n$ in virtù della Serie Euleriana. Ma con tutto il maggiore sforzo della sua Sintesi il Lorenzini non sarebbe mai giunto a sapere che mentre l' Equazione

ne

Esercitazione VI. v'à qualche cosa sulle Logistiche. [Si vedano inoltre il N.° rosso 32. dell' *Esercitazione* II. e la *Nota* (76)]. Fiorì il Lorenzini dal Luglio del 1652. sino all'Aprile del 1721.

(299) Sia consultata la *Nota* (75). Il *Monitum* del Lorenzini al num. 2. del Tomo citato prende origine dalla descrizione data dal Grandi nel luogo citato degli *Ugenini*. Pare adunque che il Grandi fosse il primo a pensare intorno alle infinite Logistiche. E difatto egli scrisse così (luogo citato a p. 6$\frac{7}{8}$). *De quibus & egregium Tractatum genesi a nobis perhumaniter accepta, conscripsit insignis Geometra Laurentius Lorenzini, quem utinam cum aliis Tractatibus res geometricas accuratissime, & profundissime illustrantibus, typis aliquando committeret!* Sia letta a questo proposito la Prefazione di Monsignor Bottari (pag. X. e XI.) all' *Exercitatio Geometrica* stampata in Firenze nel 1721.

ne della Logistica fosse stata $y = \left(\mathrm{L}x\right)^{\frac{n'}{2}}$ ovvero $y^{\frac{2}{n'}} = \mathrm{L}\,x$ ossía $e^{y^{\frac{2}{n'}}} = x$, posto n' qnalunque numero impàri, il suo Spazio infinitamente-lungo Asintotico, dipendesse dalla *Quadratura* del Circolo, e fosse eguale precisamente a $\frac{1.\,3.\,5.\,7.\,9.\,11.\,\ldots\ldots n'}{2^{\frac{n'+1}{2}}} \cdot \sqrt{C}$, come adesso siamo in grado di stabilire mediante le dottrine premesse. Questo è appunto il commercio, del quale ò parlato sin da principio, tra l' Aree d' alcune delle Logaritmiche e quella del Cerchio. Si possono cumulare in un Teorema solo le Aree delle Logistiche perfettamente *quadrabili* e le altre *quadrabili* concessa la *quadratura* del Circolo. Basta per questo effetto annunziare il Teorema cosi ,,. Data l' Equazione della Logistica $y^{\frac{2}{m}} = \mathrm{L}x$ o piuttosto $e^{y^{\frac{2}{m}}} = x$, e posto m qualunque numero intero *positivo*, se *pari*, sarà lo Spazio Asintotico geometricamente *quadrabile* e soggetto alla regola del Lorenzini (*si exponens submultiplex sit unitatis &c.*), se *dispàri*, sarà *trascendente* lo spazio Asintotico, ma Funzione algebrica dell'Area Circolare ,,. Qual' specie siano di quantità *trascendenti*, e come si possano conseguire prossimamente per mezzo di Serie Infinite l' Aree Asintotiche d'altre Logistiche Paraboliche espresse dall' Equazione $y^{\frac{r}{m}} = \mathrm{L}x$ ovvero $e^{y^{\frac{r}{m}}} = x$, dove l' *esponente* $\frac{r}{m}$ non non sia riducibile alla precedente *forma*, si deriva per *Saggio* dai Numeri 24. e 25. Nè Lorenzini nè Grandi trattarono delle Logistiche Iperboliche, e qualora n'avesser trattato, mancavano d' istrumento onde poterle quadrare. Avvene una di queste, cioè quella rappresentata dall' Equazione $y^2 = \frac{1}{\mathrm{L}x}$ ovvero $y^2\,\mathrm{L}x = 1$ ossia $e^{y^{-2}} = x$, il cui Spazio Asintotico dalla parte dove la Linea viapiù si accosta all' Asintoto $\int y dx = \sqrt{C}$, e vale a dire eguale al Rettangolo dell' Asse o Base, su cui riposa l' istesso Spazio Asintotico, nella mediacontinua geometrica Proporzionale tra l' Asse medesimo e la Circonferenza del Circolo che l' averebbe come Diametrò. Ad altre Aree *trascendenti* insegna il Numero 26. che vengano a farsi eguali o presso a poco esprimibili con delle nuove Serie Infinite gli Spazj Asintotici di altre Logistiche, cui appartenesse l' Equa-

l' Equazione $y^q (Lx)^p = 1$ o piuttosto $e^{\sqrt[p]{y^q}^{-1}} = x$, purchè $p > q$ nè $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$.

Ma la più ammirabile a mio giudizio di queste Logaritmiche Iperboliche è quella distinta dall'Equazione $yLx = 1$ cioè $e^{\frac{1}{y}} = x$. Imperciocchè lo Spazio infinitamente-lungo compreso tra la medesima Linea ed il suo Asintoto viene ad essere eguale in virtù del Num. 29. a $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13}$ — &c., mentre quello Asintotico dell' Iperbola Apolloniana pareggia la medesima Serie senza l' alternativa dei *segni* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} +$ &c., e vale a dire il primo si uguaglia allo Spazio dell' Iperbola Conica rappresentante il Logaritmo Neperiano di 2. Non è, nè dev' essere di poca sorpresa il vedere che dopo il commercio spiegato tra le Aree di alcune Logistiche e il Cerchio, comparisca in altre il commercio tra le loro Aree e l' Iperbola. Andando più avanti a parlare di tutte quelle Logistiche, alle quali spettano l' Equazioni $y(Lx)^2 = 1$, $y(Lx)^3 = 1$, $y(Lx)^4 = 1$, &c., e generalmente $y(Lx)^n = 1$ o piuttosto $e^{\frac{1}{\sqrt{y}}} = x$, $e^{\frac{1}{\sqrt[3]{y}}} = x$. &c. $e^{\frac{1}{\sqrt[n]{y}}} = x$, posto n qualunque dei Numeri della Progressione *naturale* Aritmetica, gli Spazj loro Asintotici si fanno infiniti e più che-infiniti nel senso, ordine, e rapporto intimo coll' Iperbola di Apollonio (cioè coll' L2), che dimostra la *Tavola* del Num. 29., qualora sia vera, e meriti perciò l' accoglienza dei Matematici. I segni negativi, che accenna l' istessa *Tavola*, non meno che quelli, i quali s' incontrano nell' adoprare piuttosto la Funzione $-Lx = L\left(\frac{1}{x}\right)$ in cambio dell' altra Lx, sono cose tropp' ovvie nella dottrina delle Curve per non esigere adesso da me nè interpretazione nè schiarimento.

32. Quanto alla ricerca di tutte le altre proprietà, che rimangono, delle infinite Logistiche, come Tangenti, Massimi o Minimi, Punti-singolari, Curvature, Solidi, e loro Superficie &c. &c. nulla vi ha di più facile per conseguirle. Riportai tempo fà la Logaritmica Neperiana e di qualunque altro Sistema Logometrico

alla

alla famiglia delle Parabole (300), assegnando così coi primi Elementi della Geometria e del Calcolo in poche linee tutto ciò, che rispetto ad essa dimostrarono con molto apparato, dopo di Cristiano Huyghens, il P. Abate Grandi ed altri eccellenti Scrittori. Non diversamente considero le Logistiche degli altri gradi come *limiti* delle Curve *generis Parabolici* ognivolta che siano espresse dall'Equazione $y = (Lx)^n$ ovvero $y = (-Lx)^n$, e sia n numero *positivo* ed intero. Difatto se la Curva di *genere Parabolico* fosse $y = \left(\frac{x^m - 1}{m}\right)^n$ o piuttosto $y = \left(\frac{1 - x^m}{m}\right)^n$, si convertirebbe in una Logistica subitochè $m = 0$. Qualunque poi fosse l'esponente p o intero o rotto o *positivo* o *negativo*, averebbesi parimente la Logistica universale o Parabolica o Iperbolica espressa sempre dal *limite* di quella Curva algebrica distinta coll'equazione $y = \left(\frac{x^m - 1}{m}\right)^p$, ovvero $y = \left(\frac{1 - x^m}{m}\right)^p$, ponendo $m = 0$. Quei metodi adunque, che la comun Algebra somministra per trovare le proprietà ed affezioni di queste Curve Algebriche, conducono ancora a determinar quelle delle Logistiche di vario grado dopo fatta la dovuta sostituzione. Anzi tutte le Logistiche potrebbero essere rappresentate anche come *limiti* di Curve algebriche, le quali avessero per Equazione $m^{n+1} x^m (1-x)^n = y$, posto $m = \infty$. Così per esempio $\int y dx$ nella Logistica : $\int y' dx$ nella Curva *analoga* algebrica $:: 1 : \frac{1}{2\left(\frac{1}{m}\right)+1}$ per $x = 1$ e $n = 1$, cioè come $1 : 1$ quando $m = \infty$. Di nuovo se $n = 2$, si ottiene $\int y dx : \int y' dx :: 1 . 2 : \frac{1 . 2}{3\left(\frac{1}{m}\right)+1} :: 1 : 1$ mentre $m = \infty$. In generale $\int y dx :$

$\int y' dx$

(300) *Magnitudinum Exponentialium &c. Theoria nova &c.* nel Capitolo VIII. a pag. 509. 510. . *De Calculo Integralium Exercitatio Mathematica* alla pag. XXI. (Vedasi la *Nota* 3.). In quest'ultima Opera avrei dovuto citare nel §. 54. parlando della Superficie del Cono Obliquo una Dissertazione postuma di Leonardo Euler inserita nel Tom. III. *Nova Acta &c.* dell'Accademia di Pietroburgo per l'anno 1785. edizione del 1788. (da pag. 69. a 90.), la quale à per titolo *De Superficie Coni Scaleni, ubi imprimis ingentes difficultates, quae in hac investigatione occurrunt, perpenduntur*. Ma non vi si tratta che di sole (sebbene ingegnosissime) approssimazioni per mezzo delle Serie Infinite.

$\int y'dx :: 1.2.3.4.5\ldots\ldots n : \frac{1.2.3.4.5\ldots\ldots n}{(n+1)\frac{1}{m}+1} = 1:1$ nella medesima ipotesi di $m = \infty$, ossia del suo *limite*. Colla sola differenza però che per generare le Curve Logistiche dell' ordine n mediante quest' ultimo *Limite* si faccia necessario l' uso dell'altro *Limite* sussidiario delle Parabole $x^m = z$, siccome apparisce rileggendo i Numeri 10. 19. 28. 29. Ecco adunque come riportando le Logaritmiche all'Asintoto o ad un Asse perpendicolare all'Asintoto, e valutandole ora per *limite* di linee algebriche dalla parte dello *zero*, ora dalla parte dell' Infinito, riesca di spingere tanto più oltre le teorìe Ugeniane quanto che queste compariscano un punto solo a paragone dell'altre. Ma nulla ci perde al confronto l'immortal Matemaiico dell' Olanda, perchè convien sempre giudicare del merito degli Uomini grandi dal Secolo, in cui vivevano. Pressochè tutta la Teorìa sin quì divisata dal §. 27. in poi riconosce per unico suo fondamento il principio a senso mio manifesto che il vero Infinito *armonico* venga rappresentato dalla Serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{\infty}$, nè debba mai immaginarsi protratta questa più oltre della Frazione $\frac{1}{\infty}$, e che per l' istesso motivo che l' Integrale $\int\frac{dx}{1-x} = \int\frac{x^0\,dx}{1-x}$ esteso da $x=0$ sino a $x=1$, il quale porta á quell' Infinito *armonico*, si limita al periodo solo di tutti i *denominatori* o numeri *naturali* possibili da 1 sino all' ∞, non diversamente l' altro Integrale $\int\frac{x^\infty dx}{1-x}$ nella medesima ipotesi abbia da limitarsi ad un periodo eguale da $\infty+1$ sino a $\infty+\infty=2\cdot\infty$, e non debba progredire più oltre quando risolvasi nella sua Serie. Parimente ò supposto che $L\infty = L(\frac{1}{0}) = -L0 = \infty$ *armonico* di concerto con tutti i Matematici, che ne hanno sino al presente trattato, fuori del solo Leonardo Euler tanto nella Dissertazione profonda *De numero memorabili in summatione progressionis harmonicæ naturalis occurrente*, inserita tra l' altre della Parte II. degli *Atti* dell' Accademia di Pietroburgo per l' anno M. DCC LXXXI. (a pag. 49. e segg.), quanto nell'altra postuma sopraccitata del Tom. IV. degli *Atti nuovissimi* dell' istessa Imperiale Accademia (pag. 3.). Del rimanente, se il modo da me praticato nella considerazione di quelle Serie a seconda di tutti i Geometri sia il solo accettabile a fronte di ciò, che l' immortale Leo-

Leonardo Euler ci lasciò scritto sì nel Volume XIX. della prefata Imperiale Accademia (*Nova methodus Quantitates Integrales determinandi* dalla pag. 66. alla 71.), sì negli altri Tomi annunziati (*Note* 262. e 301.), e principalmente nell' eccellente *Memoria* distinta col titolo *Uberior explicatio methodi singularis nuper expositæ Integralia alias maxime abscondita investigandi*, sarà il soggetto d'un nuovo esame tra i varj argumenti propostimi nel mio *Diporto Analitico*. Egli è però sempre vero che dipendendo la *Tavola* dei *termini* della Serie Euleriana corrispondenti agli *indici* interi negativi dall' unico valore di $\int\frac{dx}{Lx}$ (siccome ò mostrato nel Num. 29.), qualora questo non fosse nell' assunta supposizione $=L2$, ma piuttosto quel *numero* infinito *trascendente* ed inesplicabile, che piacque all' Euler, sarebbe facile riformare l' istessa *Tavola* col sostituire quell'[α] incognito in vece dell' L2; di tal maniera che resterebbe tuttavia completa la ricerca presente, che verte intorno alle Logaritmiche *Iperboliche*, ed all' elegantissima Serie, cui si riferiscono specialmente queste mie poche MEDITAZIONI (301).

RELA-

(301) Tutto il maraviglioso della Teorìa nuova dell' Euler si parte dalla sua bella ed ingegnosa Dissertazione *De progressionibus harmonicis observationes*, pubblicata del 1740. dalla pag. 150. sino alla 162. del Tomo VII. *Commentariorum Academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitanæ ad annos M. DCC. XXXIV & XXXV.* Conviene di consultare principalmente i §§. 2. 6. 7. 11. e 12., e non meno che le *Institutiones Calculi Differentialis* (ediz. del 1755.) dell' istesso Scrittore incomparabile al Capitolo VI. della Sezione II. (*De summatione progressionum per series infinitas*) (a pag. 444.).

CORREZIONI

Da farsi nelle *Meditazioni Analitiche*.

Pag.	lin.	ERRORI	CORREZIONI
5	1.	$\frac{1}{S\delta x(dx)}$	$\frac{1}{\int dx(\varphi x)}$
8	15.	algebriche	non-algebriche
10	7.	Nota (32) alla pag. 218.	alla pag. 318
12	11.	$[\delta n\,.\,\infty]$	$[\varphi n\,.\,\infty]$
ivi	18.	$\frac{1}{\delta n}$	$\frac{1}{\varphi n}$
ivi	22.	appartiene	apparisce
13	2.	o si crede	o non si crede
14	2.	Nota (45) ai §§.	i §§.
19	ult.	$n=\frac{2}{3}$	$n=\frac{1}{2}$
20	16.	di più il	di più che il
ivi	ult.	compilato	complicato
ivi	5.	Nota L' Euler	L. Euler (*e così a pag.* 23. *lin.* 3. *della Nota* (68)
21	8.	$(f+4g)(f+5g)(f+5g)(f+6g)$ &c.	$(f+4g)(f+5g)(f+5g)(f+6g)$ &c.
22	12.	$\frac{\cdot 5 \cdot}{3}$	$\frac{\cdot 5 \cdot}{2}$
ivi	ult.	$\frac{n'+1}{2}$	$2^{\frac{n'+1}{2}}$
ivi	6.	Nota vero $\frac{\sqrt{\frac{c}{2}}}{2}$	vero $\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{2}}$
ivi	7.	ivi *au*	*a*
24	3.	*determinatore*	*denominatore*
26	2.	Nota. (82) 1713.	1712
27	18.	$\pm$	$\mp$ (*e così a lin.* 19. 20. 21.)
28	6.	. . . . . .	(*tolti in fondo.* (*Così ancora a lin.* 8; *pag.* 44. *lin.* 16; *pag.* 47. *lin.* 8; 48. *lin.* 2 *e* 6; *pag.* 62. *lin.* 9; 63. *lin.* 2; 95. *lin.* 1. *e* 2; *ed altrove*)
31	2.	Nota (102) *a*	a
32	11.	$Sd\,(x^{0})$	$\int d(x^{\infty})$
34	1.	Nota (111) Difatto Euler il Padre fu	Difatto ch'Euler il Padre fosse

ivi	3.	ivi $\int dx(-Lx)^n$,	$\int dx(-Lx)^n$ come nel num. 7. l'ò ivi diffusamente provato.
35	3.	intuitivamente	intuitiva mentre
36	4.	per il	il
37	4.	Indici $\frac{1}{2}$ Termini x'	Indici $-\frac{1}{2}$ Termini x'
ivi	3	Nota (122) in cambio di $\sqrt{\frac{\Pi}{2}}$	in cambio di $\frac{\sqrt{\Pi}}{2}$.
39	24.	da Newton	di Newton
ivi	1.	Nota (128) I luet	Huet
41	ult.	$\int dz(1-z^2)^2$	$\int dz(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$
ivi	7.	Nota $\sqrt{C}$	$\sqrt{c}$
43	18.	$\left(\frac{-((z^2)^\infty)^0-1}{0}\right)^{\pm\frac{1}{2}}$	$\left(-\left(\frac{((z^2)^\infty)^0-1}{0}\right)\right)^{\pm\frac{1}{2}}$
ivi	1.	Nota (137) altrove ai	oltre ai
45	4.	$\frac{\infty,^{-\frac{1}{2}-1}}{2^2} \cdot \frac{\infty,^{-\frac{3}{2}}}{2^1}$	$\frac{\infty,^{-\frac{1}{2}}}{2^0} - 1 \cdot \frac{\infty,^{-\frac{3}{2}}}{2^1}$
ivi	5.	$7^{\infty-\frac{9}{2}}$	$7 \cdot \infty,^{-\frac{9}{2}}$
ivi	16.	2 3	2 . 3
ivi	ult.	distinguendosi	distruggendosi
46	15.	$\frac{\sqrt{n+1}}{2}$	$\sqrt{\frac{n+1}{2}}$
47	1.	$\sqrt{C}$	$\sqrt{c}$ (per due volte)
49	7.	$2\infty - 2$	$2 . \infty - 2$
ivi	9.	$2 . 6\ \frac{3}{2}$	$2 . 6\ (\frac{1}{2}$
ivi	16.	$(2 . \infty + 8$	$(2 . \infty + 8)$
ivi	18.	7 9 . 11 . 13 15	7 . 9 . 11 . 13 . 15
51	4.	$\frac{7\ 9}{2^9}$	$\frac{7 \cdot 9}{2^9}$
53	11.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
54	9.	d	φ
ivi	1.	Nota (169) $\sqrt{\frac{dx}{1-xx}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$
55	4.	Nota (173) $x=\infty$	$x=0$
56	12.	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$.
58		Nota (184) $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx(1-x)^n}{0^{n+1}}$	$\int \frac{x^{\frac{1}{0}}dx(1-x)^n}{0^{n+1}}$
ivi	1.	Nota (186) 29.	39.
61	10.	$0^{\frac{n'+1}{2}}$	$0^{\frac{n'+1}{2}}$

63	5.	$\frac{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot}{(n'+n'+2)}$	$\frac{n'}{(n'+n'+2)}$
65	ult.	Ingle-	In.
71	2.	$\infty\sqrt{\infty}$	$\infty\sqrt[3]{\infty}$
72	ult.	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$
74	5.	$\frac{3}{6+n''}$	$\frac{6}{6+n''}$
ivi	6.	$\sqrt[3]{n^{n'}}$	$\sqrt[3]{n^{n''}}$
ivi	5.	Nota (233) $\int x^{f} dx\sqrt{2+x}$	$\int x^{\frac{f}{2}} dx\sqrt{2+x}$
75	11.	$\frac{3\cdot\infty}{3\cdot\infty-2\sqrt[3]{\infty^{2}}}$	$\frac{3\cdot\infty}{3\ \infty-2\cdot\sqrt[3]{\infty^{2}}}$
79	9.	Si ?	Si ;
ivi	2.	Nota (243) pag. 2 8	pag. 218
85	1.	$\frac{\cdot\ 2\ \cdot\ 3\ \cdot\ 4}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$	$\frac{1\ \cdot\ 2\ \cdot\ 3\ \cdot\ 4\ \cdot}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$
ivi	2.	$(n+7$	$(n+7)$
87	8.	$+\ .\ .\ .\ .\ .$	$+$
ivi	18.	$L2+\frac{3}{4}m$	$L2+\frac{3}{4m}$
ivi	4.	Nota (266) $\frac{P\int z}{lz}$	$\frac{P\delta z}{lz}$
ivi	2.	Nota (267) pag. 211	pag. 211. e nella nuova Edizione del 1772. pag. 187. Cap VII. Prob. 36. Sch. 3. Ex. 2.
88	1.	Nota (268) pag. 223	pag. 223. (nuova Edizione 197.)
89	8.	che nella	nella
ivi	ult.	$x^{\infty}\ 7$ (alla chiamata)	$x^{\infty}+7$
90	10.	Nota e pag. 206).	e pag. 206.) . Questa *Serie* è stata sì celebre, che ancora ai dì nostri è tornata di moda a Manchester. Vedansi le *Memoires of the Literary and Philosophical Society of Manchester* Vol. III. *London*, 1790. a pp. 335. 36. in fondo della Dissertazione *Some Properties of Geometrical Series explained &c. By John Rotheram*. Di qui nasce subito anche la *Serie* data dall' Euler (*Mem.* di Ber.

di Berlino del 1761. a pp. 93. 94. e 95.) $\frac{1-1+1-1+1-1\&c.}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\&c.}=\frac{1}{2L2}$.

92	12.	$+\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
93	8.	$-\&c.\ x^{r-r}$	$-\&c.-x^{r-r}$,
94	6.	x^{n+4}	x^{n+4}
95	2	$\frac{2}{m+1\,.\,m+2\,.\,m+3}\left(\frac{x}{1+x}\right)$	$\frac{2}{m+1\,.\,m+2\,.\,m+3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2$
96	7.	$-\int dz(Lz)^{-n}=\pm\left(\frac{\infty\, n-1}{n-1}\right.$	$\int dz(-Lz)^{-n}=\pm\left(\frac{\infty^{n-1}}{n-1}\right.$
ivi	8.	$\infty\, n-4$	∞^{n-4}
ivi	9.	$n-4\ n-5$	$n-4\,.\,n-5$
ivi	1.	Nota (290) Questa si legge	Come si legge
97	2.	$\int x^{\infty}\, dx(1-x)^{-}$	$\int x^{\infty}\, dx(1-x)^{-n}$
ivi	4.	$\int x\ \infty dx(1-x)^{-0}$	$\int x^{\infty}\, dx(1-x)^{-n}$
98	27.	dal *negativo* al *positivo*	dal *positivo* al *negativo*
99	1.	Nota (294) a *Tavola*	la *Tavola*
101	12.	$\left(\frac{0\,.\,x+x)(1-x^0)}{1}\right)$	$\left(\frac{0\,.\,x+x\,(1-x^0)}{1}\right)$
ivi	15.	$+(0+1)x^{20}$	$+(0+1)x^{2\,.\,0}$
ivi	18.	$(20+1)$	$(2\,.\,0+1)$
102	6.	$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{0}$
ivi	8.	20	$2\,.\,0$
ivi	ivi.	40	$4\,.\,0$
103	17.	y^{n}	$y^{\frac{1}{n}}$
ivi	22.	$\int dx(Lx)$	$\int dx(Lx)^{n}$
104	4.	$\frac{n'+1}{2^2}$	$2^{\frac{n'+1}{2}}$
ivi	20.	non sia	sia
ivi	24.	$e^{y^{\frac{1}{2}}}=x$	$e^{\frac{1}{y^2}}=x$
105	1.	$p>q$	$p<q$
ivi	15.	$y(Lx)$	$y(Lx)^2$
ivi	17.	. &c.	, $e^{\frac{1}{\sqrt[4]{y}}}=x$, &c.

Si tralascia di notare alcune minuzie che non alterano il sentimento.

RELAZIONE

INTORNO ALLE ACQUE DELLE FONTI DI SIENA

OVE SI TRATTA

Dei loro acquidotti, della loro natura ed usi, degli inconvenienti che ne derivano in pregiudizio della pubblica salute, e della maniera di ripararvi

DI DOMENICO BATTINI

Pubblico Professore di Medicina Pratica nell' Università e Segretario perpetuo dell' Accademia.

Quibus igitur locis longinquior erit aquatio, quacumque ratione poterit, eò aquam ducendam vel opere arcuato, vel subterraneis cuniculis, vel apertis rivis existimo; ut res humanæ vitæ tam necessaria potius redundet, quam deficiat. Doni *de rest. salubr. agri Rom.* pag. 161.

§. I. SE ha riscosso in ogni tempo il meritato applauso l' aureo precetto lasciato da Ippocrate ai Medici, affine di riuscire perfetti nella loro arte, di non dover giammai trascurare la cognizione del suolo, dell' aria, e delle acque, nella quale faceva consistere ed il giusto giudizio sulla salubrità e insalubrità dei luoghi, e la cognizione esatta della natura dei mali che vi predominano, ed il sicuro metodo di curarli (1); con maggior ragione dovrà applaudirsi alla vigilanza e premura di un Governo saggio ed illuminato, il quale facendo agire le molle che sono in suo potere ecciti opportunamente l'attenzione ed attività dei Medici, e dai risultati delle loro ricerche sappia trar profitto a pubblico vantaggio. Questi infatti restano per lo più sterili in mano dei Medici o non producono che frutti tardi ed imperfetti; laddove in mano di chi governa divengono estremamente fecondi, ed i frutti ne sono anticipati e durevoli.

(1) *De aere, aquis, & locis* n. 1.

§. II. Le Acque o si riguardino per il lato della loro qualità originaria o per quello dell' uso che se ne fa, sono bene spesso la causa della prospera salute o della malsanìa di un Popolo. La loro bontà, la copia, il buon regolamento ne formano la felicità, come la negligenza ne fa l' abjezione e il decadimento. Le istorie dell'antica e moderna Roma sono un perenne monumento dei sorprendenti vantaggi che a lei ridondarono dalle cure prese dai suoi Edili, dagli Imperatori, e dai Pontefici per arricchirla di acque copiose e salubri, e dei danni gravissimi che risentì nei tempi infelici dal trascurarle.

§. III. La Città di Siena non sarà certamente nell'opinione di essere a sufficienza provveduta dalle sue fonti. Ad essa ricordano i rovinati ed abbandonati acquidotti quanto una volta fosse più doviziosa di acque. La penuria di acqua, che provano tutte le sue fonti, i condotti particolari, ed in specie gli orti nei tempi asciutti, i compensi o insufficienti o sozzi, coi quali in parte si supplisce, la total sua insufficienza per l' uso di pubblici e privati edifizj, non possono lasciarla in inganno sull' attuale rilevante mancanza. Le assidue cure del suo Magistrato Comunitativo per mantenerne le sorgenti e per provvedere alla scarsezza quanto è nelle sue facoltà con sì tenue profitto, le provano ogni giorno il bisogno di un braccio superiore e potente, che le restituisca l' antica abbondanza.

§. IV. Sua Eccellenza il Sig. Vincenzo Martini Consigliere intimo attuale di Stato di S. A. R. il Serenissimo Gran-Duca di Toscana, Luogo-Tenente Generale e Governatore della Città e Stato di Siena informata di molti inconvenienti, che si supponevano negli acquidotti e nel regolamento delle acque, li credè meritevoli dell' attenzione del Real Governo; e fu sommamente penetrata dalle doglianze promosse intorno alla natura di queste acque, le quali, generando continuamente molte grume o concrezioni tartarose nei canali ove scorrono e depositando una crosta terrosa nei vasi, nei quali si espongono al fuoco, non senza motivo erano credute piene di crasse terrestri particelle e capaci di produrre varie infermità in quelli che devono farne uso continuo, tra le quali non essendo infrequenti in Siena le malattie di calcoli e renelle, nulla sembrava più verisimile, che il dovere esse l' origine alla qualità delle acque. Questi erano già motivi pressanti di commetterne un'accurato esame; e fummo noi destinati; ma ne insorse poscia un' altro ancora maggiore, a cui ci fu estesa la commissione. Raccogliendosi in diverse parti della Città e facendosi ristagnare le le acque di scolo per uso delle imbiancatrici e della irrigazione degli orti, si ebbe ragion di temere nascondersi quivi l' occulta causa delle febbri simili a quelle dei luoghi palustri regnanti annualmente

mente in Siena nell' estate e'd autunno, dalle quali osservavasi nelle tabelle mortuarie tanto accresciuta in quelle stagioni la mortalità degli abitanti.

§. V. Questi diversi oggetti sembrarono a noi pure della più grande importanza, e quantunque per determinarci ad adempire con premura la commissione affidataci nulla più abbisognasse che la partecipazione dei venerati comandi dell' E. S., dobbiamo confessare che l'intima persuasione della delicatezza dell'affare e delle utilità che poteano derivarne concorse ad impegnarci viepiù e ci avvertì, che in nulla doveasi precipitare il nostro giudizio, ma tutto era d'uopo esaminare con la più scrupolosa esattezza e rappresentare senza umani riguardi ciò che si fosse trovato e verificato.

§. VI. Con questa mira (1) abbiamo scorsi in molte parti gli acquidotti o bottini della Fonte detta di Piazza e anticamente *Fonte Gaja*; abbiamo esaminata l' acqua, i metodi di distribuirla, e le sue deposizioni; si sono visitati gli scoli e gli usi che se ne fanno sino all' intiera loro consumazione; e si sono fatte tutte quelle osservazioni e ricerche che in qualsisia modo potevano influire al più esatto adempimento del nostro incarico. Renderemo pertanto conto di tutte le cose ritrovate e dei nostri sentimenti sotto cinque Titoli, cioè:

1. Acquidotti.
2. Acque.
3. Regolamento.
4. Inconvenienti.
5. Rimedj.

ARTICOLO I.

Acquidotti.

§. VII. Siena fabbricata sopra colline di tufo per la natura del suolo non ha vene naturali di acque, colle quali provvedere ai bisogni dei suoi abitanti. Ne trasse un tempo da luoghi più remoti e tuttora ne goderebbe i vantaggi, se le guerre esterne non avessero distrutti gli antichi acquidotti. Fu pertanto ridotta a coltivare l' espediente più atto in quelle circostanze a provvedere la Città di acque, il primo per quanto sembra che fosse immaginato, e

 stato

(1) In questa visita ci furono di scorta il Sig. Antonio Matteucci Ingegnere a ciò destinato, soggetto di molto sapere e riputazione, di cui la Città meritamente ha pianto l' immatura morte, ed il Sig. Giuseppe Gani pubblico custode dei bottini, la cui pratica, perizia, e notizie ci hanno molto giovato.

ſtato eseguito con spese grandiose, mentre la Repubblica Senese spiegava la sua maggior grandezza e potenza. Furono a tale effetto scavati nel duro tufo spechi o gallerie sotterranee, che dalla Città dividendosi in rami secondo l'opportunità s'innoltravano nel seno delle più elevate adjacenti colline, allacciando di mano in mano li stillicidj di acque, che dalla superficie per filtrazione, ove trovinsi acquitrini, e altri riſtagni e conserve di acque, vanno a scaricarsi nei sottopoſti artificiali vuoti. L'ampiezza della Città, per cui si dilatava in molti luoghi bassi ed era circondata di sobborghi, diè occasione e comodo negli antichi tempi di coſtruire molti simili acquidotti, dei quali si vedono tuttora i veſtigj; ma ridotta poscia entro più anguſti limiti, resi inabitabili o inutili molti dei quartieri più bassi, diſtrutti i sobborghi in conseguenza della sua spopolazione, furono abbandonati molti di queſti acquidotti, nè si pensò più a mantenere che quelli che conducevano l'acqua alle parti più abitate (1).

§. VIII. Tra queſti richiesero in ogni tempo maggiori cure ed ispezioni quelli dell'antica Fonte Gaja o Fonte di Piazza, sì perchè servendo ad una fonte situata, dopo quella di Fontanella poverissima di acqua, in parte molto più elevata di tutte le altre, ed essendo perciò più prossimi alla superficie, sono soggetti a maggiori inconvenienti, quanto ancora per il motivo, che l'acqua di queſta fonte interessa la maggiore e più scelta parte degli abitanti. Per tali cause non essendoci permesso dalle circoſtanze dei bottini delle altre fonti di assicurarci personalmente dello ſtato di tutti, abbiamo almeno voluto riconoscere colla visita personale lo ſtato attuale degli acquidotti o bottini della Fonte di Piazza, ed osservare quali vantaggi o pregiudizj provenissero all'acqua della maniera nella quale sono coſtruiti e mantenuti.

§. IX. In tempo pertanto di pioggia, all'oggetto di osservarne contemporaneamente gli effetti, c'introducemmo nei bottini primieramente dentro Siena per Fonte giuſta e c'innoltrammo verso il galazzone poſto sotto il prato del Nobil Collegio Tolomei fuori di Porta Camollìa, indi ritornati indietro osservammo tutto il corso dell'acqua sino alla conserva o purgatorio poſto dietro appunto alla

(1) Nel Tomo I. delle Lettere Sanesi del P. Guglielmo della Valle si trovano riunite molte interessanti notizie intorno alle varie fonti di Siena, e loro acquidotti o bottini, e specialmente alla pag. 229. e segg. 257. 260. e segg. Vedasi anche intorno alla Fonte Gaja e suoi bottini il Tomo II. pag. 155. e seg. e pag. 180. e seg. Dietro a questa Relazione si daranno molte notizie per schiarimento e illustrazione di ciò che viene quì soltanto accennato intorno agli acquidotti della Fonte del Campo o Fonte Gaja.

alla Fonte di Piazza. Siccome le osservazioni fatte in questa occasione si dovranno riferire più opportunamente in appresso con le altre relative alla distribuzione e regolamento delle acque nella Città, lasciando di fermarvisi adesso, passeremo a parlare di ciò che riguarda il corso dei bottini e delle acque fuori della Città.

§. X. Entrati adunque nel giorno istesso nel bottino per l'ingresso posto sotto il Borgo fuori di Porta Camollìa retrocedemmo prima alquanto per osservare il nominato galazzone; quindi ritornando donde ci eravamo partiti continovammo il cammino per il ramo maestro. Giunti all' ingresso del ramo di Marciano c' innoltrammo in esso per osservare le scaturigini sue e i bianchissimi tartari che ivi si formano. Retroceduti al ramo maestro continovammo il viaggio osservando tutti li stillicidj e i diversi influenti sino al ramo di S. Dalmazio ed al ramo di Quarto. Questo giro bastò per farci conoscere la natura delle vene perenni allacciate da questi bottini, quelle delle acque provenienti da stillicidj impuri che vi s' introducono dopo le pioggie, gli inconvenienti che vi sono per difetto naturale dei bottini, quelli per difetto del regolamento e manutensione, ed infine i vantaggi e pregiudizi risultanti dalla maniera in cui sono costruiti.

§. XI. Le acque che si raccolgono dagli stillicidj più puri e perenni originariamente limpidissime, sono di natura atta a produrre grume o concrezioni tartarose. Infatti quasi da per tutto, ma specialmente, come abbiamo noi stessi veduto, nel ramo di Marciano e parimente, secondo che ci è stato assicurato, nel ramo di Quarto e altrove, dovunque gemono le Acque, producono bellissime stalattiti ed altre concrezioni di tal genere. In quei luoghi ancora dei bottini stessi dove o li stillicidj non sono perenni o le acque che danno sono men pure, si formano, sebbene in minor quantità, le solite stalattiti, ma colorite. Scorrendo le acque in un gorello aperto incavato e costruito nel pavimento del bottino, generano continuamente una pellicola terrosa e degli incrostamenti e grume ai lati del canale e delle deposizioni al fondo, che ordinariamente provengono dalla caduta delle pellicole dopo essersi ingrossate. Le radici degli alberi che penetrano nei bottini e sono irrigate dalle acque che ne gemono, e le radici che con prodigiosa vegetazione si distendono per lunghi tratti nel canale stesso dell' acqua s' incrostano di tartaro. Nel galazzone seguitano a produrre alla superficie una simile crosta tartarosa.

§. XII. Le acque soltanto che stillano nei bottini in tempo di asciuttore, se giudicar si dee dalla qualità delle materie che depongono e dalle qualità fisiche, sono le più pure; imperocchè le tartarizzazioni che da esse provengono sono in ogni tempo bianchissime, le acque sono limpide, nè giammai si alterano, neppure in tempi di piogge dirotte. Nei tempi piovosi e così generalmente nell'

in-

inverno s' introducono nei bottini delle acque, le quali, se si devono giudicare dalle loro qualità e dalle materie che depongono, sono molto impure. Queste acque si osservano torbide e di colore oscuro, ed a misura che si mescolano con le acque limpide provenienti dalli stillicidj del primo genere rendono torbida la mescolanza. Nella superficie delle volte e pareti dei bottini, per le quali scorrono, lasciano una traccia oscura, nerastra, e sordida. Questi impuri stillicidj si riscontrano specialmente dove i bottini scorrono prossimi alla superficie del terreno e non ne sono rimossi da buone volte e pareti murate. Ad essi sogliono pure aprire il varco le radici degli alberi ancora dove i bottini non siano tanto superficiali, murati, o scavati nel duro tufo, le quali con sorprendente avidità penetrano in questi ricettacoli, vi vegetano vigorosamente, vi si prolungano, e vi si ingrossano. Da questa ultima cagione hanno origine certi stillicidj di media natura, i quali nei bottini profondi sono prodotti da acque superficiali, che s' introducono per le fenditure del terreno fatte dalle radici penetranti nei bottini. Non può abbastanza esprimersi il male che cagionano le radici degli alberi. Esse non solo s'insinuano a traverso dei tufi più duri, e guastando a poco a poco la stabilità della volta naturale dei bottini e delle loro pareti obbligano a riparare ai frani con volte e pareti murate, ma giungono perfino ad internarsi nei muri, a scollegarli, ed a produrre a traverso a questi una gran quantità di stillicidj impuri.

§. XIII. L'influenza malefica di queste acque impure non comparisce soltanto nell' intorbidamento che inducono nelle acque limpide, colle quali si mescolano; ma ancora in una maniera distinta nell' alterazione delle concrezioni tartarose dopo la loro mescolanza. Queste grume e deposizioni divengono tanto più colorite e fosche, quanto più le acque si avvicinano alla Città ed hanno acquistato nel loro corso un maggior numero di tali stillicidj. Quindi la pellicola del galazzone è di un colore giallo-scuro, e le grume raccolte nel ramo maestro che s' introduce in Città sono giallastre e friabili. Colla mira di schiarire sempre più l' indole originaria delle acque di questi bottini e la causa delle alterazioni avvventizie si determinò di esaminare i componenti di tali diverse grume.

§. XIV. Ne furono pertanto scelte quattro sorte:

1. Le bianchissime e dure stalattiti del ramo di Marciano;

2. Alcune stalattiti prodotte da stillicidj di media natura nel ramo maestro che s' innoltra verso Monte Celso tinte di rossigno come da un' ocra, alle quali facevano strada le radici delle piante insinuatesi a traverso della volta murata;

3. La pellicola raccolta dal galazzone;

4. Le concrezioni giallastre, friabili, raccolte a bella posta dal ramo, che s' introduce in Città.

§. XV.

§.XV. Cinquanta grani per ciascuna sorta precedentemente polverizzate furono poste in digestione nell'acido acetoso, il quale ne disciolse lentissimamente una buona porzione, ma infine, per quanto eccesso ne fosse aggiunto, non vi esercitò più, neppure con l' ajuto del calore, la minima azione. Ciò che non fece l'acido acetoso fu compito dall'acido marino (1) (*acido muriatico*). Esso continuò la soluzione, lasciando differenti quantità di residuo insolubile. Non fummo facili a credere che la parte non attaccata dall'acido acetoso e sciolta poi dall'acido marino fosse assolutamente insolubile dal primo, la di cui azione potea sospettarsi essere stata impedita dall' agglutinamento di alcune parti più dure, la cui adesione non fosse stato capace di vincere quell'acido debole (2). Per assi-

(1) Se in questo scritto non ho seguita la nuova nomenclatura chimica e mi sono attenuto per così dire alla più antica, non dee dedursene che io non conosca tutto il pregio di quella e non ammetta la maggior parte dei fatti e delle nuove teorie, su cui si sostiene. Per quanto alcune ragioni mi distogliessero dall'usare la detta nuova nomenclatura nelle mie Memorie sopra le Acque Minerali inserite nel Tomo VII. degli Atti di questa R. Accademia delle Scienze, e pubblicate anche separatamente, è noto generalmente che molto innanzi non era io stato degli ultimi a promuovere in questa Università il gusto delle nuove scoperte e dottrine chimiche, e ad adottarle nei miei Scritti e nelle mie spiegazioni. Per la qual cosa non fu bene dedotto da alcuni che si compiacquero render conto di tali mie Memorie nelle loro Opere periodiche, che per non avere usata la nomenclatura rigettassi le dottrine e fossi tuttora attaccato alla ipotesi del flogisto; e tanto meno ragione se ne avea, quando io non aveva tralasciato di avvertire che altri riflessi diversi dal non approvar le dottrine aveanmi indotto a ritener per allora gli antichi nomi. In questa occasione pure varie non dissimili ragioni mi obbligarono a non partirmi dalla nomenclatura più generalmente nota a quelli che non coltivano la Chimica *ex professo*, tanto più che lo scritto dovea essere munito della firma degli altri Deputati per trasmettersi al Real Governo, i quali io non sapeva se tutti si fossero ormai determinati a seguire le dottrine, colle quali è necessariamente connessa la nuova nomenclatura. Mi dispenserei volentieri dal contrapporre i nuovi nomi ai vecchi, come altri han fatto, poichè ciò è inutile per chi non li conosce o non ne conosce le ragioni, e chi è fornito di queste notizie non ignora certamente i vecchi nomi; ma per deferire all'altrui opinione non ometterò di farlo dove più mi sembri necessario.

(1) Avvertirò in questo luogo per solo lume di chi si avvisasse di trarre conseguenze dalla più pronta dissoluzione dei carbonati calcarei nell'acido acetoso e dalla maggiore o minore effervescenza che l'accompagna, che in pari circostanze la soluzione è più pronta e l'effervescenza maggiore quanto le molecule dei carbonati sono tra loro meno aderenti, e perciò giova ridurli in finissima polvere e al massimo grado di divisione. Malgrado però la cura che si pone a polverizzarli vi sono talora alcune molecule più dure che resistono all' azione dell'acido acetoso, ancorchè ajutato dal calore della ebullizione, le quali male a proposito si crederebbero insolubili da quest'acido, poichè l'insolubilità dipende dalla concorrenza di una circostanza accidentale che ne impedisce l'effettuazione.

assicurarcene, dopo aver separato tutto il ferro della soluzione nell' acido marino per mezzo dell' alcali prussiano (*prussiato di potassa*) se ne precipitò la terra colla soluzione ſtretta dell' alcali vegetabile (*carbonato di potassa*), la quale fu poscia di nuovo sottopoſta all' azione dell'acido acetoso. Queſto allora la sciolse tutta con molta energia, a riserva di una tenuissima quantità di materia bianco-giallaſtra, leggiera, ſloculenta, di natura vegetabile, rassomigliante ad un mucco nuotante nell' acqua, porzione della quale veniva anche depoſta a poco a poco dalla prima soluzione acetosa. In tal modo si verificò che tutta la terra solubile dagli acidi era del genere di quelle solubili nell' acido acetoso. Queſta terra non poteva dunque essere che terra calcaria (*carbonato di calce*), o magnesia (*carbonato di magnesia*). Per vedere se vi esiſtesse la seconda ed in qual proporzione, furono condotte a siccità le due soluzioni acetose, e sciolto quindi di bel nuovo in acqua diſtillata il sale acetoso fu aggiunta ad ambedue separatamente l'acqua di calce a poco a poco sinchè non si videro i primi indizi della formazione della pellicola. Per tal mezzo la sola pellicola del galazzone di Num. 3. (§.XIV.) diè un tenue precipitato magnesiaco e lo diè non dalla seconda, ma dalla prima soluzione acetosa, facendo conoscere che la terra, che resiſtè all' azione dell'acido acetoso non fu la magnesia, ma semplicemente una porzione della terra calcaria (*carbonato di calce*).

§. XVI. Il residuo insolubile delle grume di Num. 1. e 2. fu una tenuissima porzione di una materia nerastra parte filamentosa e parte pulverulenta. Il residuo poi di quelle di Num. 3. e di Num. 4. fu una materia giallastra. Queſto solo era in quantità suscettibile di ulteriore esame. Ed infatti avendolo poſto sopra un ferro rovente, da principio fumò e diventò nero come il carbone e concepì una tenue fiammella lambente, quali fenomeni manifeſtarono chiaramente l' indole di una porzione combuſtibile, dichiarata dall' odore del fumo di natura vegetabile. Tenuto quindi lungo tempo espoſto al calore rovente di nero diventò rossigno. Quando non fece più mutazione, tolto dal fuoco, fu sottopoſto all' azione dell' acido nitroso per separarne la cenere e qualche particella di ferro, che potesse avere acquiſtata. Reſtò una terra del colore presso a poco dei mattoni, e siccome le volte, le pareti, ed i canali sono coſtruiti di mattoni potè supporsi che la parte insolubile dagli acidi altro non fosse che un poco di soſtanza dei mattoni ſtessi rosa dalle acque nello ſtillare attraverso ai muri e nello scorrere per il canale. Infatti come si vedrà in seguito, il residuo insolubile dei componenti dell' acqua trattato similmente dà una terra diversa.

§. XVII. Le quantità respettive delle diverse materie componenti le suddette concrezioni furono quali appariscono nell' appresso:

TA-

TAVOLA SINOTTICA

Concrezioni

	Num. 1.	Num. 2.	Num. 3.	Num. 4.
Terra calcaria (*carbonato di calce*) . . . gr.	49 $\frac{3}{5}$	„ 49 $\frac{5}{8}$	„ 47 $\frac{5}{6}$	„ 46 $\frac{2}{3}$
Magnesia Aerata (*carbonato di magnesia*) „	———	„ ———	„ — $\frac{5}{6}$	„ ———
Ferro in ſtato di calce, (*ossido di ferro*) . . . „	— $\frac{1}{36}$	„ ———	„ — $\frac{1}{6}$	„ — $\frac{1}{6}$
Mucilagine vegetabile „	— $\frac{1}{4}$	„ — $\frac{1}{8}$	„ — $\frac{1}{5}$	„ — $\frac{1}{6}$
Residuo insolubile . . . „	— $\frac{1}{8}$	„ — $\frac{1}{4}$	„ 1 $\frac{1}{4}$	„ 3
Somma gr.	50	„ 50	„ 50	„ 50

§. XVIII. Da queſto esame (§. XIV. — XVII.) si raccoglie che l' acqua unitamente al tartaro depone negli acquidotti, per i quali è condotta alla città, una materia terreo-vegetabile tanto più abbondante, quanto più le acque si avanzano, e che, deponendone le acque limpide quantità minime, è d'uopo attribuirla agli ſtillicidj di acqua impura. Questa materia consiſtendo per una porzione in una terra insolubile o sia di natura silicea, e per una parte di ultimi avanzi della decomposizione dei vegetabili, quantunque reſtasse in parte diffusa nell' acqua che perviene alle fonti non sarebbe di natura atta a contribuirle alcuna qualità nociva; ma trovandosi in quantità eccedente non mancherebbe di renderla ingrata al palato ed all' occhio per la copia dei corpicciolì in essa sospesi e natanti, come succede non di rado nei tempi piovosi.

§. XIX. E da tutte le riferite osservazioni si ha per generale risultato: 1. Che le acque condotte dai bottini della Fonte di Piazza sono impregnate di un tartaro compoſto principalmente di terra calcarea, talora miſta ad un poco di magnesia; 2. Che scorrendo per canale aperto dentro i bottini, nei quali l' aria eſterna ha libero accesso, depongono continuamente una gran parte di queſto tartaro; 3. Che all' oppoſto dalle filtrazioni di acque torbide acqui-

ſtano successivamente delle impurità che alterano le qualità sensibili dell'acqua, le quali depongono poi in parte prima di giungere alla Città, ritenendone però sempre, e particolarmente in tempo di dirotte piogge, qualche porzione.

§. XX. Per quanto poi non siano ſtati da noi personalmente visitati i bottini dell'acqua di Fontebranda, per non essere passeggiabili se non per piccolo tratto; pure dalle prese notizie avendo rilevato che nei suoi bottini produce aggrumamenti e tartarizzazioni maggiori di quelle che si generano dell' acqua della Fonte di Piazza, che diſtillà da un suolo della medesima natura, che i suoi bottini sebbene più profondi sono penetrati dalle acque delle pioggie conducenti acque torbide e impure, perchè l'acqua della fonte dà manifeſti segni della concepita alterazione, siamo autorizzati a credere che i fenomeni non debbano essere molto differenti e che quello che si è trovato nell' esame degli acquidotti della Fonte di Piazza si possa senza errore attribuire ancora agli acquidotti di Fontebranda.

ARTICOLO II.

Acque.

§. XXI. SEbbene l'acqua della Fonte di Piazza formasse il principale oggetto delle nostre ricerche, pure nell' esserci accinti al suo chimico esame ottimo consiglio fu riputato di associarvi quello ancora dell'acqua di Fontebranda, da molti tenuta in gran pregio e della prima più perfetta e salubre, non solo perchè eſtendevamo con ciò l' utilità del lavoro e ci procuravamo in essa un confronto, ma sul riflesso eziandio dell' antica fama di queſta fonte. L'Analisi delle due acque fu prima eseguita nell' eſtate del 1792. e ripetuta poscia nel susseguente inverno dopo lunghe pioggie, acciò sodisfacesse a tutti gli oggetti.

§. XXII. L'esame delle qualità fisiche ci diè gli appresso risultati.

1. Queſte acque attinte subito dalle pubbliche fonti ai loro sbocchi comparvero generalmente limpide e criſtalline. Osservando però attentamente vi si scorgono anche a occhio nudo dei corpuscoli sospesi e natanti, sempre più copiosi nell'acqua di Fontebranda che in quella di Piazza, i quali dopo le pioggie sono più abbondanti, mentre comparisce leggiermente alterata la limpidezza dell' acqua,

2. Non emanano odore sensibile.

3. Il sapore, quando godono dell' ordinaria limpidezza, è grato e vivace. Dopo le piogge perdono la vivacità e talora acquiſtano un leggiero sapor di terra. L'acqua che di fresco attinta è grata e vivace, lasciata a lungo in vaso aperto peggiora il suo sapore che apparisce tanto più crasso, quanto è ſtato più lungo il riposo.

4. Il

4. Il calore ne è vario secondo le ſtagioni ed il calore atmosferico.

5. Il peso specifico esaminato per mezzo dell' areometro in tempo eſtivo alla temperatura di gradi 13 fu trovata ſtare all' acqua diſtillata, in quella di Piazza come 1,0000 a 1,0007, ed in quella di Fontebranda come 1,0000 a 1,0008.

§. XXIII. Se ambedue si lascino espoſte all' aria:

6. Sprigionano lentamente delle bolle di aria intanto che alla loro superficie si forma una tenue pellicola. Se si espongano al fuoco si sviluppa una quantità considerabile di bolle aeree e si genera con prestezza la stessa pellicola alla superficie, mantenendosi al di sotto il fluidó perfettamente limpido. Questa pellicola nell'acqua di Fontebranda si è trovata sempre alquanto più densa che in quella di Piazza. Filtrata l'acqua per carta emporetica di peso noto dopo sostenuta ebullizione, nelle diverse prove ripetute in più tempi dopo il conveniente prosciugamento, giammai neppure dall'acqua di Fontebranda si è potuto ottenerne un'aumento nel peso della carta maggiore di un mezzo grano per ogni libbra di acqua. La sostanza terrea formante la pellicola indicata se gettisi nell'acido acetoso vi si scioglie con effervescenza.

§. XXIV. Le esperienze eseguite coi reagenti furono le appresso:

7. Immersavi la carta colorita con laccamuffa prese in ambedue una tinta rossigna leggierissima e fugace; ed essendo stata ripetuta l'esperienza con la medesima carta arrossita dall'acido acetoso, nell'atto che generava delle bolle aeree si restituì al suo natural colore. Se le stesse carte infondevansi nell'acqua stata prima sottoposta all' ebullizione e filtrata, non soffrivano alcun cangiamento.

8. La carta colorita col verzino di Fernambouc e alterata coll' acido acetoso in ambedue ricuperò il suo natural colore, ma non lo cangiò punto in violetto.

9. L' acqua di calce le dealbò ambedue leggermente, ma quella di Fontebranda alquanto più di quella di Piazza. Mescolata l'acqua di calce con le medesime acque dopo essere state sottoposte alla ebullizione, non vi produsse mutazione sensibile.

10. L' acido saccarino intorbidò molto queste acque; ma dopo l' ebullizione e filtrazione non le alterò più in minima parte.

11. La soluzione stretta di alcali fisso aerato (*carbonato di potassa*) le dealbò ambedue, ancora dopo essere state depurate con l' ebullizione.

12. Se instillavasi in esse l'alcali prussiano (*prussiato di potassa*) senza alcuna loro preparazione non presentavasi la minima apparenza di azzurro; ma se eravi stato precedentemente aggiunto un poco di acido nitroso (*acido nitrico*) purissimo, in tal caso compariva una tenue nuvoletta azzurra.

13. La soluzione nitrosa di piombo diè un precipitato bianco abbondante, il quale veniva disciolto quasi totalmente dall' acido acetoso.

14. La soluzione nitrosa d' argento produsse in ambedue un precipitato bianco copioso. Se però la soluzione era con eccesso di acido, tenuissimo era allora il dealbamento ed incominciava dalla comparsa di alcune strie, diffondendosi poi lentamente in tutto il fluido. E tali appunto furono i fenomeni della stessa soluzione perfettamente saturata, instillata nell'acqua depurata coll'ebullizione.

15. La soluzione nitrosa di mercurio diè in ambebue un precipitato giallastro, alquanto maggiore nell'acqua di Fontebranda, e minore tanto nell' una che nell'altra state antecedentemente sottoposte alla ebullizione. Ma questi precipitati erano tutti solubili nell'acido acetoso, se pur forse se ne eccettui qualche porzione quasi impercettibile.

§. XXV. Dalle riferite esperienze (§. XXII. — XXIV.) si raccoglie:

1. Che in ambedue vi è dell' aria fissa o acido aereo (*acido carbonico*) (3. 6. 7. 9.).

2. Che contengono delle terre effervescenti (*carbonati terrosi*) (7); le quali si depongono ogni volta che si espelle, o si perde l' aria fissa (6); che la loro quantità ne è varia alquanto, ma sempre tenue (8), e non maggiore di un mezzo grano per ogni libbra di acqua (6) di cui gran parte è terra calcaria (*carbonato di calce*) (10).

3. Che vi è tenuissima quantità di ferro, non combinato con altro acido fuori dell'acido aereo (12).

4. Che non vi è selenite (*solfato di calce*) nè altro sale a base calcarea (10).

5. Che vi è una tenue porzione di sale composto dall'acido marino (14) e forse una porzione tenuissima formata dall' acido vitriolico (*acido solforico*) (14 15 16.

6. Che alcuni di detti sali sono a base probabilmente magnesiaca (11).

7. Che la quantità sì delle terre, che dei sali è un poco maggiore nell'acqua di Fontebranda, che in quella della Fonte di Piazza (1 3 5 6 9 11 15).

§. XXVI. La precisione nei quantitativi e più speciali cognizioni delle qualità doveano desumersi dall' esame dei residui dell' evaporazione. A tale effetto furono evaporate libbre 69 di ambedue le acque in vaso di terra vetrinato fino alla riduzione del fluido a piccola mole, essendo stato allora passato in vaso di vetro per compire l'operazione. Il residuo raccolto con diligenza da ambedue i vasi non oltrepassò i grani 13 nell' acqua di Piazza, e i gr. 19 nell' acqua di Fontebranda. Questa inaspettata scarsezza

nei

nei quantitativi indusse il sospetto che una porzione si fosse perduta nelle porosità e ineguaglianze del vaso di terra e si determinò di ripetere le evaporazioni dal principio al fine in vasi di vetro per escludere ogni possibile distrazione di materia. Nel tempo adunque di maggiore asciuttezza ne furono svaporate altre libbre 30 per sorta, e se ne ritirarono gr. 13 di residuo dall'acqua della Fonte di Piazza, e gr. 31 dall'acqua di Fontebranda. Di uguali quantità fu ripetuta l' evaporazione in tempo d' inverno dopo lunghe pioggie, coll'avvertenza di non prendere l'acqua da destinarsi a questa operazione se non dopo essere cessata la pioggia di qualche giorno e si ottennero gr. 20 di residuo tanto dall' una, che dall' altra.

§. XXVII. Questi residui attraevano tutti più o meno l'umido atmosferico, e più potentemente quello di Fontebranda; erano ruvidi al tatto e di colore cenerognolo ovvero giallastro. Il colore dei residui dell'acqua della Fonte di Piazza fu costantemente cenerognolo; quello poi dell' acqua di Fontebranda tratto dalle libbre 69 di acqua era del colore del tufo, ed al medesimo inclinavano gli altri residui della stessa acqua. Per la separazione delle diverse sostanze componenti questi residui fu tenuto il metodo che siegue.

§. XXVIII. Primieramente furono tenuti in infusione nello spirito di vino rettificato affine di separarne il sale deliquescente indicato dalla proprietà osservata nei medesimi di attrarre l' umido aereo ed insieme le altre sostanze solubili nello stesso mestruo. Quindi furono tenuti nell'acqua distillata fredda, all'effetto di ritirarne i sali insolubili nell' alcool e solubili nell' acqua a freddo. In terzo luogo spogliati che furono esattamente dalle sostanze indicate furono sottoposti all'azione dell'acido nitroso (*acido nitrico*) purissimo. Rimase un piccolo residuo insolubile da tutti i mestrui messi in opera.

§. XXIX. La soluzione spiritosa (§. XXVIII.) fu fatta svaporare o al calore solare o ad un fuoco lentissimo. Il residuo era un magma di color giallo assai fosco che attraeva potentemente l' umido. Era evidente esser desso un sale deliquescente infetto da molta materia estrattiva. Si procurò di separare il sale dalla parte estrattiva per mezzo dell'acqua distillata, ma ciò non riuscì che imperfettamente, perchè l'acqua scioglieva questa materia. Il sale ottenuto restò in conseguenza sempre infetto da una porzione di essa, in modo però da potersi trascurare senza grave errore.

§. XXX. La parte salina (§. XXIX.) veniva prima prosciugata con diligenza sopra un vetro da orologio e pesata. Scioglievasi poi di nuovo ed allungavasi con acqua distillata e dividevasi in più porzioni. In una era instillata la soluzione dell' acido saccarino,

che

che non avendo mai alterata la mescolanza escluse la presenza di qualunque porzione di base calcaria. Con altra si mescolava l'acqua di calce, che diede sempre un precipitato giallastro a fiocchi. La soluzione nitrosa d' argento instillata in una terza porzione non mancò mai di dare istantaneamente un precipitato bianco a strie, che subito si raccoglieva al fondo in forma di un coagulo. Ciò bastò per assicurare che il sale deliquescente era un puro sale marino a base di magnesia (*muriato di magnesia*).

§. XXXI. Quanto alla parte estrattiva (§. XXIX.) oltre a quanto se ne è di già accennato, cioè essere essa solubile sì nello spirito di vino, che nell' acqua, si osservò che prosciugandosi acquistava un colore sempre più fosco, ma lo schiariva al contrario ad un calor brusco. Posta sopra un ferro rovente da principio si annerì, emanò un fumo, concepì una tenuissima fiamma lambente turchiniccia; levata dal fuoco si presentò sotto la forma di una massa spongiosa bruna attaccata al ferro. Questa è una materia vegetabile della natura di quelle, che chiamansi estratto-resinose.

§. XXXII. La soluzione acquosa (§. XXVIII.) similmente fatta evaporare a lentissimo calore e quando la materia erasi ridotta a piccol volume veniva colata sopra un vetro da orologio e quivi condotta a siccità all' oggetto di facilitarsi il modo di conoscerne il peso. Il residuo conteneva una sostanza salina indicata dal sapore e dalla forma regolare di alcune molecule. Ma neppur questa era pura. Bisognava passarvi sopra rapidamente delle piccole porzioni di acqua distillata per separarne la parte salina, e ripetendo varie volte lo stesso artifizio dopo aver condotta la materia a perfetta asciuttezza si giungeva ad ottenere il sale sufficientemente puro.

§. XXXIII. Questo sale dalla figura dei cristalli ordinariamente compariva di due qualità, poichè alcuni erano di figura aghiforme ed altri di figura cubica. Ora predominavano gli uni ed ora gli altri. Esso non potea sottoporsi ciascuna volta alle prove coi reagenti per la sua scarsezza. Fu scelto a questo fine il sale ritratto dalla prima evaporazione di libbre 69 per ciascuna sorta di acqua dove anche le quantità respettive potevano esser facilmente conosciute separando i cristalli cubici dagli aghiformi. Tutte le soluzioni di questo sale fatte in acqua distillata furono divise in più porzioni per osservarvi gli effetti di diversi reagenti. I risultati furono presso a poco eguali in ambedue le acque. La soluzione muriatica di terra pesante instillatavi vi produsse un copioso precipitato istantaneo e lo stesso la soluzione nitrosa d'argento, dando questa alle prime goccie un precipitato pronto accagliato; l'acqua di calce vi produsse un precipitato leggiero a fiocchetti, che si raccoglieva in carta pesata per cui si filtrava il fluido per sa-

saperne il peso. Si dedusse da questi sperimenti che il sale era un misto di sali composti dall'acido marino e dall'acido vitriolico. Il sale composto dall'acido marino era vero sal comune (*muriato di soda*) perchè non era deliquescente e dava cristalli perfettamente cubici. Il sale composto dall'acido vitriolico era un sale d'Epsom (*solfato di magnesia*), perchè la base di magnesia indicata dall'acqua di calce non poteva essere combinata che con l'acido vitriolico.

§. XXXIV. L'altra sostanza che, come si accennò, contaminava il sale estratto col mezzo del fluido acquoso, ora fu in maggiore, ora in minore quantità. Essa da principio sciogievasi assai bene nell'acqua ed allora aveva un color giallastro. Ma prosciugandosi, specialmente con fuoco non leggiero, diventava più bianca e prendeva una forma lamellosa lucida e la sua solubilità diventava minore esigendosi quantità sempre maggiori di acqua per scioglierla. Lo spirito di vino, neppure bollente, non aveva su questa materia la minima azione. Posta sopra un ferro rovente fuma leggiermente, si annerisce, indi degenera in una polvere cenerognola. L'indole sua non sembra diversa da quella delle sostanze mucilaginose vegetabili, sebbene alquanto alterata.

§. XXXV. Per dimostrare i principj stati disciolti dall'acido nitroso (§. XXVIII.) si diè principio da ricercarvi il ferro. L'acido nitroso adoperato ne era del tutto privo. Avendo adunque l'alcali prussiano instillato in questa soluzione prodotto in essa un precipitato azzurro, non potè dubitarsi della presenza del ferro. Questo però fu sempre in tenuissima quantità. Cessata l'azione del reagente, dopo che l'azzurro si fu riunito al fondo in mollecule grosse, fu filtrato il liquore. L'aumento di peso acquistato dalla carta dopo essere stata ben lavata con passarvi sopra acqua distillata, e quindi asciugata, indicò la quantità dell'azzurro.

§. XXXVI. Separato e conosciuto così il ferro ed una sol volta senza averlo separato, si procedè a precipitare tutte le terre per mezzo della soluzione di alcali vegetabile (*carbonato di potassa*) ben puro. Le terre precipitate, dopo essere state ben lavate, edulcorate, e asciugate, furono sottoposte all'azione dell'acido acetoso per separare le terre solubili dalle insolubili da quest'acido. Ma esso nell'acqua della Fonte di Piazza le disciolse tutte, ad eccezione di quando non ne era stato prima separato il ferro, essendo allora rimasto un residuo giallastro, che sciolto nell'acido nitroso diè col mezzo dell'alcali prussiano la corrispondente quantità di azzurro. Nell'acqua poi di Fontebranda rimase un piccolo residuo avente i caratteri della pura argilla (*allumina*). La soluzione acetosa sempre fu svaporata a siccità sì per liberarla dall'acido aereo (*acido carbonico*), che potesse esservi rimasto nell'effervescenza delle terre, che per privarlo dell'acido acetoso sovrabbondante. Nella soluzione

del

del sale acetoso in acqua distillata, previa la filtrazione, fu versata a poco a poco l'acqua di calce finchè non diè segno di formazione di pellicola alla superficie, e se ne separò costantemente un precipitato a fiocchi, il quale per mezzo della filtrazione fu raccolto in una carta di peso noto. Questo precipitato era magnesia pura, la quale bisognava considerare in stato di combinazione con l'acido aereo per dedurne la quantità di magnesia aerata (*carbonato di magnesia*) contenuta nelle acque. Detratta questa ed il ferro, egualmente che l'argilla quando vi era, il resto altro essere non poteva che terra calcaria (*carbonato di calce*).

§. XXXVII. Non ci rimane da esaminare se non che cosa fosse quell'ultimo residuo insolubile a tutti i mestrui (§. XXVIII.). Esso era di color cenerognolo ora più chiaro ed ora più cupo, composto di parti filamentose e pulverulente. Appena fu posto sopra un ferro rovente si annerì, si accesero le parti combustibili e furono suscettibili di concepire una tenuissima fiamma. Quindi ne schiarì il colore a poco a poco consumandosi la parte annerita e se ne ebbe un residuo ora candidissimo, specialmente dall'acqua di piazza, ed ora misto di parti rossigne. L'acido marino ne sciolse alcune porzioni con qualche effervescenza, ma la maggior parte restò insolubile e si concluse che il residuo esaminato era un misto di terra silicea (1) e di materia combustibile ultimo avanzo della risoluzione delle sostanze vegetabili.

§. XXXVIII. Queste acque contengono come si è veduto (§. XXV. 1.) dell'aria fissa (*gas acido carbonico*). Per determinarne la quantità adottammo il metodo di mescolarvi l'acqua di calce e dalla quantità del precipitato prodottovi, detratte le sostanze contenute

---

(1) Il Sig. Mandruzzato, cui devono un nuovo lustro i celebri Bagni di Abano e molto benemerito dell'arte di analizzare le acque minerali, nell'estratto della mia Analisi dell'acqua di Montalceto (Giorn. di Medic. di Venez. Tom. IX. Part. Fis. pag. 16.) avverte che *non può essere ben provata la presenza della terra silicea per la sola insolubilità nell'aceto*; *dacchè essa potrebbe essere calce ossidata*, *secondo ciò che* ha indicato *nella seconda parte del Trattato de' Bagni di Abano*. Non mi è nota questa *calce ossidata*, ed io avrei sommamente gradito che il celebre Autore alla Sez. III. §. XXX. della seconda parte dell'opera citata, in luogo di appoggiarne l'esistenza alla sola congettura si fosse data la pena di verificarla con le prove necessarie, e di assicurarsi che la parte supposta insolubile delle sue concrezioni calcaree e del carbonato che spontaneamente si forma dall'acqua di calce al contatto dell'aria non fosse selenite formata dall'acido solforico adoperato con la calce de' carbonati e depostasi per non potersi sostenere in dissoluzione nel fluido che in parte, la quale riuscirebbe insolubile ancora dagli altri acidi; lo che era tanto più opportuno e indispensabile perchè si trattava di un composto del tutto sconosciuto nella Chimica, il quale non era perciò lecito ammettere senza una rigorosa dimostrazione.

tenute nell'acqua, che doveano pure unitamente cadere al fondo, inferirne la quantità dell'aria fissa contenuta nell' acqua in stato di libertà. Affinchè il risultato fosse men soggetto ad errore operammo su quattro libbre di ciascuna sorta di acqua (1). Ma questo esperimento eseguito in Agosto non fu ripetuto nell' inverno.

(1) Il Sig. Mandruzzato (luog. cit. pag. 17.) non trova buono questo metodo per rintracciare la quantità di aria fissa o gas acido carbonico contenuta nelle acque, principalmente perchè *non tutti i precipitati di carbonato di calce contengono la stessa quantità di gas acido carbonico nè di acqua di cristallizzazione*. Nondimeno tutte le ricerche dei Chimici non sembrano lasciar dubbio alcuno sulla certa e costante proporzione tra la terra e l'acido nei carbonati calcarei, quantunque differiscano tra loro i Chimici nello stabilire tal proporzione a cagione dei metodi differenti tenuti da essi nel determinarla. Ed il Sig. Mandruzzato nella Parte II del suo Trattato dei Bagni di Abano, a cui ci richiama, non adduce neppure una prova sperimentale della sua asserzione.

A scanso di mala intelligenza dirò, che in questi sperimenti ho sempre distinto due stati dei carbonati calcarei. Uno è quello in cui sono quando sono indisciolti e indissolubili. L'altro quando si trovano sciolti in acque contenenti gas acido carbonico. Nel primo stato io riguardo i carbonati calcarei costituiti invariabilmente da quella proporzione tra l' acido e la calce, che risulta dalla reciproca saturazione dei due componenti. Egli è nei carbonati calcarei in questo stato, che in cento parti Bergman ha trovato costantemente 34 di acido, 55 di calce, e 11 di acqua, Wenzel 43 $\frac{1}{3}$ di acido, 52 $\frac{1}{6}$ di calce e 5 di acqua, Kirwan secondo le ultime sue esperienze fatte sul marmo statuario 45 di acido (*Mem. sur la force des acides &c. V. Annales de Chymie T. XIV. pag.* 238 *e seg.*).

Or io non credo che i carbonati calcarei possano contenere diverse quantità di acido carbonico al di sotto della perfetta saturazione della calce; perchè avendo affusa dell'acqua di calce in due porzioni eguali di acqua artifizialmente impregnata di gas acido carbonico, in una di queste porzioni a poco a poco, nell' altra tutta ad un tempo, ho trovato con reiterate prove che ambedue esigevano egual quantità di acqua di calce prima che cominciasse a formarsi la pellicola indicante l' eccesso della calce, o che dopo la filtrazione cessassero di dare del precipitato calcareo per l'affusione di nuova acqua di calce. Che se vero fosse ciò che suppone il Sig. Mandruzzato, siccome nel primo caso non vi sarebbe concorrenza simultanea, le molecule di calce successivamente affuse verrebbero tutte pienamente saturate e nell'altro caso l'acido dovrebbe distribuirsi equabilmente nelle molecule di calce concorrenti simultaneamente onde i carbonati si otterrebbero più o meno saturati secondo che più o meno acqua di calce si mescolasse con l'acqua pregna di gas acido carbonico, e maggiori o minori sarebbero le quantità di carbonato calcario che se ne ritirerebbero; lo che certamente non segue.

Questo medesimo vien confermato dalle seguenti esperienze. Presi cinquanta grani per sorta dei suddetti carbonati ed avendone fatta lentamente la soluzione nell'acido nitrico allungato con tenere esatto conto dei materiali impiegati, me ne è risultata costantemente la perdita dovuta al gas che si sviluppa tra 17 e 18 grani, e giammai più nè meno nelle stesse esperienze ripetute molte volte, quando sono state prese le necessarie precauzioni, e che non erano stati privati dell' acqua costitutiva i carbonati; con che viene a stabilirsi il gas acido carbonico con-

§. XXXIX. La quantità dei componenti ricavati dalle acque respettive nei diversi tempi, taciute fin quì per brevità appariranno dalle seguenti Tavole, quali sono state riconosciute col peso, o de-

contenuto nei carbonati tra 34 e 36 per 100. Le precauzioni necessarie, senza di che i risultati sono molto differenti, per quello che l'esperienza mi ha insegnato, sono: 1. Che la soluzione dei carbonati nell'acido nitrico si faccia in vaso chiuso con una semplice tenue apertura che permetta l'egresso al gas che si sprigiona senza permetterla allo spruzzo cagionato dalla effervenza; 2. Che fatta la soluzione si permetta che a poco a poco perda spontaneamente il gas che resta impegnato nel fluido, o si esponga ad un leggier calore per sollecitare la separazione del gas; altrimenti la perdita apparisce minore; 3. Che acciò non si dissipi nè acido nè acqua coll'evaporazione si avverta che l'acido non ecceda il bisogno per la saturazione della base calcaria, e si tenga la soluzione o si esponga all'azione del calore in vasi chiusi, dai quali un sottil tubo o apertura dia esito al gas e non permetta, che si disperda il vapore acquoso. E' poi molto meglio in queste esperienze servirsi dell'acido nitrico o muriatico, che dell'acido sulfurico, perchè la selenite che si depone, e si mescola con i carbonati da sciogliersi per una parte impedisce la libera e completa azione dell'acido, e per altra parte lascia incerto il punto della total dissoluzione; laddove gli altri acidi sovramentovati non lasciano il minimo dubbio, poichè il sale, che ne risulta, rimane tutto in dissoluzione. Questi offrono ancora il comodo di tenere a calcolo le impurità insolubili, qualora come spesso avviene si trovino tramischiate coi carbonati, che trascurate produrrebbero una variazione nei risultati. Ho detto, che tali erano le perdite da me costantemente ritrovate con l'accennato metodo, purchè i carbonati non avessero punto perduto della loro acqua di cristallizzazione, per il motivo, che avendo alcuna volta sottoposto dalle stesse prove dei carbonati, che avevano sofferta l'azione di un calore alquanto forte, non però capace di scomporli, la perdita è stata un poco maggiore, cioè fino a 38 e più per cento. Ma neppure in questo caso mi è accaduto di vederla ascendere alle quantità indicate da Wenzel e Kirwan, e molto meno a quasi 47 per 100 come avvenne al Sig. Mandruzzato nei carbonati calcarei ottenuti con versare l'acqua di calce sopra l'acqua dei Bagni di Abano (Dei Bagni di Abano P. II. pag. 67).

Siccome adunque dal combinare insieme le esperienze surriferite pare che si possa conchiudere con qualche sicurezza, che nei carbonati calcarei la proporzione dell'acido alla base è costante, ed eguale a quella stabilita da Bergman o poco maggiore, ne segue, che *la spontanea separazione delle terre mentre l'acqua perde l'acidità* non lascia punto incerto il punto di saturazione; e che i carbonati calcarei non potranno esser privati, sia spontaneamente, sia per l'azione del calorico, o per quella della calce, che del gas acido carbonico soprasaturante, in virtù del quale stavano in dissoluzione nell'acqua. Al di là di questo punto niuna forza di fuoco sul carbonato calcareo immerso nell'acqua è capace di disunirne l'acido, nè qualunque eccesso di calce è suscettibile di appropriarsi parte alcuna dell'acido stesso; e dove vi sia eccesso di acido qualunque molecula di calce che si forma in carbonato calcario si unisce con quella precisa quantità di acido carbonico necessaria a costituire il carbonato medesimo nelle consuete proporzioni ad esclusione delle molecule di calce concorrenti in eccesso.

Io aveva già fatte queste Analisi e lo scritto aveva avuto il suo corso quando vennero a mia cognizione le difficoltà e i nuovi metodi del Sig. Mandruzzato. Que-

o dedotte col calcolo. Ove per altro non potevasi indicare il preciso quantitativo dell' aria fissa è stata soltanto indicata la sua presenza col segno +.

Acqua della Fonte Gaja, o di Piazza

In libbre 30.

	Estate	Inverno
Aria fissa (*gas acido carbonico*) . . . . gr.	9 $\frac{6}{7}$	,, +
Terra calcaria (*carbonato di calce*) . . . . ,,	7 $\frac{1}{4}$	,, 14 $\frac{5}{18}$
Magnesia aerata (*carbonato di magnesia*) . . . . ,,	1 $\frac{1}{8}$	,, 0 $\frac{2}{9}$
Ferro in stato di calce (*ossido di ferro*) . . . . ,,	0 $\frac{1}{18}$	,, 0 $\frac{2}{27}$
Sal marino a base di magnesia (*muriato di magnesia*) . . . . ,,	0 $\frac{1}{8}$	,, 2 $\frac{1}{8}$
Sal marino comune (*muriato di soda* . . . . ,,	2 $\frac{1}{6}$	,, 0 $\frac{1}{3}$
Sal d'Epsom (*solfato di magnesia*) ,,	1 $\frac{1}{3}$	,, 2 $\frac{2}{3}$
Materia estratto-resinosa . . . ,,	0 $\frac{1}{2}$	,, 0 $\frac{1}{5}$
Materia estrattiva mucilaginosa ,,	0 $\frac{1}{4}$	,, 0 $\frac{1}{3}$
Residuo insolubile . . . . ,,	0 $\frac{1}{4}$	,, 0 $\frac{1}{8}$

Queste esperienze non ebbero altro oggetto che di accertarmi se eravi bisogno di una rettificazione, e se in appresso io doveva cangiar metodo. Ma in vece sembra che ne provino la bontà, la quale comparirà maggiormente se a confronto dei piccolissimi difetti di questo si pongano quelli degli altri metodi seguiti dai Chimici per determinare la quantità di acido carbonico contenuto nelle acque minerali. Tra questi io non potrei mai indurmi ad adottare quello proposto nel luogo citato dal Sig. Mandruzzato. Egli è vero che ci può dare il totale di detto gas, cioè unitamente tanto di quello costituente il carbonato calcario contenuto nelle acque e i carbonati salini che vi fossero, che di quello in eccesso; ma siccome la virtù che le acque gazose ripetono dal gas acido carbonico dipende unicamente da quella parte di gas, che non è intimamente combinata colla calce o con altre basi terrose o saline, ma che vi è in eccesso e che comunemente dicesi libero; convien dunque conoscere separatamente questa porzione in eccesso; lo che ha appunto in mira il metodo che è stato da me costantemente seguitato nelle mie analisi.

Acqua di Fontebranda

	In libbre 30.	
	Estate	Inverno
Aria fissa (*gas acido carbonico*) . . . . . gr.	17 $\frac{17}{20}$	+
Terra calcaria (*carbonato di calce*). . . . . „	23 $\frac{8}{9}$	15 $\frac{4}{9}$
Magnesia aerata (*carbonato di magnesia* „	1 $\frac{1}{9}$	0 $\frac{5}{9}$
Argilla (*allumina*) . . . . „	1 —	0 $\frac{2}{3}$
Ferro in stato di calce (*ossido di ferro*) „	0 $\frac{1}{9}$	0 $\frac{2}{27}$
Sal marino a base di magnesia (*muriato di magnesia*) . . . . „	3 $\frac{3}{4}$	0 $\frac{1}{2}$
Sal marino comune (*muriato di soda*) . „	0 $\frac{1}{6}$	0 $\frac{5}{6}$
Sal d'Epsom (*solfato di magnesia*. . . . . „	0 $\frac{2}{3}$	0 $\frac{2}{3}$
Materia estratto-resinosa . . . . „	0 $\frac{1}{6}$	0 $\frac{3}{4}$
Materia estrattiva mucilaginosa . . . . „	0 $\frac{1}{4}$	1 $\frac{3}{4}$
Residuo insolubile . . . . „	1 —	1 $\frac{1}{8}$

Le quali quantità, prendendo il termine medio tra l' estate e l' inverno, ragguagliano in cento libbre d' acqua come appresso:

	Libbre 100	
	Acqua della Fonte di Piazza.	Acqua di Fontebranda.
Aria fissa (*gas acido carbonico*) . . . . gr.	+	+
Terra calcaria (*carbonato di calce*) . . . . „	38 $\frac{6}{14}$	65 $\frac{5}{9}$
Magnesia aerata (*carbonato di magnesia*) . . „	2 $\frac{1}{4}$	2 $\frac{7}{9}$
Argilla (*allumina*) . . . . „	0	2 $\frac{7}{9}$
Ferro in stato di calce (*ossido di ferro*) . . . „	0 $\frac{2}{3}$	0 $\frac{1}{4}$
Sal mar. a base di magnes. (*muriato di magnesia*)„	3 $\frac{1}{2}$	7 $\frac{1}{12}$
Sal marino comune (*muriato di soda*) . . . . . „	4 $\frac{1}{6}$	1 $\frac{2}{3}$
Sal d' Epsom (*solfato di magnesia*) . . . . . . „	6 $\frac{2}{3}$	2 $\frac{2}{9}$
Materia estratto-resinosa . . . . „	2 $\frac{1}{6}$	2 $\frac{2}{5}$
Materia estrattiva mucilaginosa . . . . „	0 $\frac{35}{36}$	4 $\frac{1}{6}$
Residuo insolubile . . . . „	1 $\frac{1}{8}$	3 $\frac{1}{2}$

§. XL.

§. XL. Si conferma pienamente dalla riferita analisi, che le acque delle fonti di Siena contengono non solo delle terre atte a depositarsi nei canali e generarvi grume o sia concrezioni tartarose, come si era dedotto dall' ispezione dei bottini, ma di più che queſte terre ne formano il carattere diſtintivo, per essere le soſtanze che unitamente all'acido aereo o aria fissa, mezzo essenziale alla loro dissoluzione, vi predominano; tutte le altre, come il ferro, i sali, e le materie eſtrattive sì separatamente, che in complesso essendovi in quantità minime e di gran lunga inferiori. Si viene però in cognizione che le ſtesse terre, quantunque predominanti a riguardo degli altri principj, pure vi sono contenute in quantità assai piccole; le quantità medie potendosi considerare circa $\frac{2}{3}$ di grano per libbra nell'acqua di Fontebranda, e $\frac{2}{5}$ di gr. per libbra in quella della Fonte di Piazza. La qual quantità continuando a ſtarvi in dissoluzione sino all'ultima particella per l'intermedio dell'aria fissa, e queſta essendo sempre nell' occasione di disperdersi in qualche parte, quindi è che queſte acque, non oſtante che nel loro tragitto per gli acquidotti abbiano già depoſta, come è probabile, la maggior parte della terra di queſta specie, che contenevano originariamente, nondimeno sono tuttora suscettibili di produrre grume o tartarizzazioni, e queſte sensibili e assai copiose nei luoghi, per i quali l'acqua scorre senza interruzione, dove perciò ogni porzione che vi passa vi lascia qualche particella e contribuisce ad aumentarne la mole per via di successive apposizioni.

ARTICOLO III.

Regolamento.

§. XLI. QUeſte notizie ci fanno ſtrada a conoscere in parte l'influenza del regolamento che si tiene per la diſtribuzione delle acque alle fonti ed altri pubblici usi, e ai Particolari, al cui esame dobbiamo ora innoltrarci. Ci reſtringeremo in queſto Articolo alla sola acqua dei bottini della Fonte di Piazza, giacchè quella di Fontebranda e le altre, dopo aver governate le respettive fonti, sono subito erogate negli usi subalterni senz' altra previa distribuzione, attesa la scarsezza dell'acqua di Fontanella e la troppo bassa situazione delle rimanenti.

§. XLII. E' d'uopo rammentarsi che l' acqua condotta dai diversi rami dei bottini della Fonte di Piazza, riunita in un sol tronco, tutta ordinariamente si versa in quel vaſto recipiente (§. X.) lungo Braccia 100, largo Braccia 4, profondo circa Braccia 5, detto il galazzone poſto sotto il prato del Collegio Tolomei fuori della Porta Camollia. In queſto galazzone l'acqua, dovendo scor-

rere

rere con moto molto lento, ha campo di deporre quelle materie, che attesa la sua velocità depor non poteva nel gorello dei bottini, ma traeva seco finchè non trovava l' opportunità di abbandonarle. L'acqua per questa sola ragione deve uscirne più depurata, purchè il recipiente sia tenuto pulito e vuoto, e non venga ripieno a bella posta, come era seguito nei tempi andati, avendolo il Sig. Antonio Matteucci, quando nel 1782. fu deputato a resarcire i bottini, trovato intieramente ripieno, per essere stato precedentemente fatto servire di scarico alle grume nei ripulimenti dei bottini istessi. Non si sà che sia mai più seguito un tale inconveniente; anzi essendovi stati allora fatti più muri divisorj, all'oggetto non solo che restasse viepiù infranto e rallentato il moto dell'acqua, ma acciò ancora potesse meglio sgravarsi dalle materie estranee, con essere obbligata a passare ora di sotto ora di sopra ai muri predetti per più volte prima di giungere all'altra estremità; perciò questo recipiente sembra dare al presente tutti i vantaggi, dei quali è suscettibile.

§. XLIII. Dal galazzone suddetto si stacca l' emissario da un livello presso a poco uguale o poco inferiore a quello del suo immissario. Nel suo tragitto per condursi alla Fonte di Piazza si staccano diversi rami per dare l' acqua ai pozzi particolari della Città ed al fontino della abbandonata Fontegiusta, un grosso ramo poi conduce l'acqua alla fonte di S. Francesco, somministrandola anco di mano in mano ai pozzi dei Particolari. Tutto il resto dell'acqua và a scaricarsi in un' ampia conserva situata appunto dietro alla pubblica Fonte della Piazza grande.

§. XLIV. Questa conserva è, come ognun vede, destinata ad un'uso consimile a quello del galazzone, cioè di obbligare l'acqua a trattenersi e deporre un resto di materie estranee nuotanti in essa, che tuttora contenesse: altro uso si è di servire di comun ricettacolo alle acque che debbono essere distribuite alla detta pubblica fonte, alle fonti dei cortili del palazzo del Pubblico ed ai rami di bottino, che conducono l' acqua alla fonte del Casato, ed alle diverse fonti del Terzo di S. Martino. Le prime specialmente, dovendo l'acqua risalire per sboccar fuori, avevano bisogno di un peso che le premesse. Infatti si staccano dalla conserva le canne di piombo che danno l'acqua alle lupe ed altri emissarj della fonte principale e quelle simili, per le quali è mandata ai due cortili del pubblico palazzo, dove è da osservarsi che l' acqua trasmessa da queste differenti canne comparisce più limpida e grata al gusto di quella dei pozzi dei Particolari. In queste canne non si formano grume in molta quantità, producendosi queste soltanto, secondo che ci ha riferito il pubblico Bottiniere, nella graticola, per cui l' acqua dalla conserva passa nelle canne, e quindi nel luogo, dove le canne si ripiegano per salire alle fonti.

§. XLV. L'acqua poi destinata per il Casato e per il Terzo di S. Martino scorre per bottini simili ai descritti, se non che sino verso il termine della Piazza per la poco loro elevatezza non sono passeggiabili. Il ramo del Casato non presenta alcuna cosa meritevole di rimarco. Rispetto al ramo del Terzo di S. Martino non possiamo passare in silenzio l'inconveniente, cui dà luogo quasi in ogni estate la somma scarsezza dell'acqua. Non essendo questa bastante ad alimentare tutte le fonti pubbliche e tutti i pozzi dei Particolari, si è costretti a far ricomparire quella che già ha servito alla fonte principale della Piazza grande gettata fuori dalle lupe. Le lupe versano l'acqua in un'ampio recipiente rettangolare esposto al pubblico e soggetto a ricevere molte immondezze. Infatti è necessario vuotarlo di tanto in tanto, acciò l'acqua raccoltavi non diventi sporca e schifosa. Il rifiuto di questo medesimo ricettacolo, che per solito dovrebbe andarsene separatamente alla gavina del mercato, nei tempi di scarsezza di acqua si rimette in circolo per un'occulto foro laterale, che mette nel ramo che conduce l'acqua al Terzo di S. Martino e si distribuisce in luogo di acqua pura, che manca alla conserva.

§. XLVI. Il ramo di S. Martino somministra l'acqua alle fonti pubbliche di Pantaneto, del Ghetto, di S. Giusto, e del Ponte, ed a quella di Pispini; con questa differenza che sino alla Fonte del Ponte scorre per bottino aperto, di quì poi sino alla Fonte di Pispini và per canale chiuso e forzato, e perciò la Fonte di Pispini manda la sua acqua a getto. Tutti i rami nominati, oltre alle pubbliche fonti, alimentano un gran numero di pozzi di Particolari, che pagano una tangente per conseguir l'acqua ed altra per il reparto delle spese delle ripuliture dei bottini, che sono gravosissime.

§. XLVII. Questi pozzi sono ricettacoli più o meno grandi, i quali ricevono l'acqua dai respettivi rami maestri per mezzo di diramazioni laterali fatte a questo oggetto. L'acqua che li riempie vi rimane stagnante essendo generalmente privi del proprio trabocco o emissario, talchè è obbligata a livellarsi col pelo dell'acqua del gorello del bottino, andandovene della nuova soltanto quando ne è levata e dovendo retrocedere se mai abbassi l'acqua del bottino. Essi dovrebbero riceverla per mezzo di tenui fistole o dadi, acciò nell'attingersi l'acqua dai medesimi non dovesse portarvisi quella del ramo maestro con troppa celerità, nè fosse lecito ai particolari abusarne a scapito altrui, e nel caso che l'acqua di qualche pozzo restasse infettata, come è facile e frequente in sì gran numero di pozzi, qualora specialmente vi cada e vi si putrefaccia qualche animale, non dovesse subito comunicare l'infezione all'acqua del canale maestro. Ma noi abbiamo sentito che tali fistole

non

non si trovano, che in pochissimi pozzi e siamo ancora di parere che piccolo ne sia il vantaggio, specialmente per il secondo oggetto, non essendo questo il principal difetto di questi pozzi. In fatti il pregiudizio per l'universale non sarebbe sensibile e per riguardo ai Particolari giova il credere che sarebbe loro cura ripararlo prontamente. Il male maggiore percuoterebbe l'opinione, a cui non porterebbero rimedio le fistole.

§. XLVIII. I pozzi costruiti nella foggia divisata (§. XLVII.) hanno un'altro male, ed è quello di far comparire l'acqua assai più cattiva di quello che sia realmente, in una maniera così marcata, che per quanta cura sia stata da noi posta nel farne una analisi esatta, da cui risulta la sua innocenza, essa non sarà mai bastante a garantirci dalla taccia di poco avveduti da chiunque sia solito lasciarsi colpire e sedurre dalle apparenze. L'acqua presso che stagnante in questi pozzi ha campo effettivamente, a meno che non sia con più frequenza dell'ordinario scossa ed agitata, di deporre e generare alla superficie una tenue sì, ma assai sensibile pellicola, la quale osservata da chi ne fa uso dà l'idea di un'acqua carica di terrea sostanza. In tempo poi lungo non lascia di generare alle pareti del pozzo delle grume tartarose e ciò che dee fare ancora più specie macchiate di un colore giallo scuro e sudicio; quantunque nulla di ciò si osservi nei recipienti aperti e pubblici delle fonti, dove l'acqua trabocca e si cangia con frequenza.

§. XLIX. Ma noi accennammo già (§. XL.) che a forma dell' analisi istituita e malgrado la tenue quantità di materia terrosa contenuta nell'acqua, essa non avea per anche perduta la disposizione a generare concrezioni tartarose, quando vi concorrono le necessarie circostanze. Infatti questa qualunque siasi quantità di terra essendovi mantenuta in dissoluzione per l'intermedio dell' aria fissa, sostanza volatile e fugace, nè apparendo di questa eccesso sopra alla quantità necessaria all'uffizio indicato, a misura che si disperde, bisogna che si deponga a proporzione la terra. E siccome quest'aria se ne vola dalla superficie, così la terra alla superficie si raccoglie in forma di pellicola, tenuissima e rarissima da principio, indi ingrossata per via di successive apposizioni. Le grume laterali non si formano che in tempo lunghissimo dalle terree particelle che nuotando nell'acqua lambiscono le pareti e vi si attaccano e sovrappongono.

§. L. Ma d'onde dipende la macchia di queste grume (§ XLVIII.) ancora più fosca di quella delle grume del galazzone e del canale maestro che introduce l'acqua in Città e qual materia altera così la loro naturale bianchezza? Il sistema di rimettere in circolazione nel Terzo di S. Martino l'acqua già stata versata nel recipiente esterno della Fonte di Piazza (§.XLV.) può far credere doversene

in

in gran parte l'origine a queſto sozzo compenso. Queſta causa però non è nè sì permanente nè sì comune a tutti i pozzi della Città, quanto lo è la produzione di quel tartaro impuro.

§. LI. Rivolgendo indietro l'occhio ai componenti dell'acqua troviamo che l'acqua gettata dalle lupe della Fonte di Piazza, sulla quale é ſtata istituita l'analisi, contiene una soſtanza vegetabile suscettibile di colorire il residuo della sua evaporazione (§. XXXVIII.) Di queſta materia ne contengono una dose appena sensibile i tartari bianchi e i meno impuri. Le grume del galazzone e quelle del ramo maeſtro, che gli serve di emissario contengono una materia giallaſtra (§. XVI.). Queſte soſtanze sono della medesima specie; espoſte al fuoco di qualunque grado vi subiscono i medesimi cangiamenti; differiscono soltanto nel colore, che nei residui delle acque può esser divenuto più oscuro e neraſtro per l'azione del fuoco nel prosciugarsi nei vasi. Paragonati insieme il residuo insolubile nell'acido marino delle grume cavate dal pozzo della Cura della Magione e quello lasciato dalle grume dei pozzi del Terzo di S. Martino, non vi è ſtata trovata, quanto alla qualità, differenza sensibile. Essendomi ſtata presentata una gruma di figura cilindrica formatasi attorno ad un legno di tal figura rimaſto isolato nel canale, che porta l'acqua dal canale maeſtro alla conserva poſta dietro alla Fonte di Piazza si osservò più leggiera e friabile di quelle iſtesse dei pozzi, tessuta a raggi divergenti, e di colore più scuro. Il suo residuo insolubile simile a quello delle grume del pozzo della Cura della Magione, era alquanto più scuro di quello delle altre mentovate grume.

§. LII. La quantità del residuo insolubile suddetto in cinquanta grani di gruma diferirono come appresso:

Le grume del pozzo della Magione, o sia presso la porta Camollia diedero del detto residuo insolubile . . . . gr. 4

La gruma trovata nell' immissario della conserva della Fonte di Piazza . . . . ,, 5 $\frac{5}{8}$

Le grume del fontino dopo la fonte di S. Giuſto, di dove si diſtribuisce l'acqua a diversi pozzi particolari . . . ,, 4 $\frac{1}{2}$

Le grume di uno dei pozzi particolari del Terzo di S. Martino poſto al di là della fonte di S. Giuſto . . . . . ,, 3 ^{8}

§. LIII. Si rileva da ciò che la quantità della materia, che forma il residuo insolubile e che colorisce e macchia le grume, cresce sempre dal galazzone alla piazza e diminuisce dalla piazza in giù. La total quiete dell'acqua, come nei pozzi particolari che non hanno trabocco, forse contribuisce alla minor quantità di tal materia, perchè le grume dei due pozzi, uno della Cura della Magione, l'altro al di là della fonte di S. Giuſto, di queſto genere, ne danno meno della gruma dell' immissario della conserva e del fontino dopo la fon-

te di S. Giusto. I corpi nuotanti nell' acqua e che ne infrangono il moto, siccome contribuiscono grandemente ad accrescere la quantità delle deposizioni tartarose, che vi si attaccano, così in proporzione sembrano contribuire alla deposizione di maggior copia del residuo insolubile.

§. LIV. Queste osservazioni (§. LI. — LIII.) pongono fuori di ogni dubbio, che le impurità ed il colore oscuro dei tartari che depone l'acqua del bottino alla Fonte di Piazza in tutto il suo corso dentro la Città e nei diversi suoi ricettacoli dipende, almeno per la massima parte non da materie o immondezze acquistate, ma da materie che trae seco fino dalle prime sorgenti. E poichè noi abbiamo distinte in tre specie queste sorgenti (§. X. — XII.), altre perenni e limpide, le quali finchè non si sono mischiate con altra specie di acque depongono un tartaro bianchissimo, altre pure perenni, ma che danno un tartaro colorito, altre infine, somministrate dalle pioggie di acque torbide e impure, le quali cessano di stillare nei bottini nei tempi asciutti; sembra perciò che l'origine di tali impurità debba ripetersi principalmente dalli stillicidj delle acque torbide delle pioggie ed in subalterno luogo da quelli della seconda specie.

§. LV. Fin qui si è veduta la distribuzione e regolamento dell'acqua del bottino della Fonte di Piazza per l' oggetto di servire all' uso immediato degli abitanti. Agli altri usi secondarj sono destinati gli avanzi dell'acqua, che danno i trabocchi delle fonti e fontini. Di questi usi altri sono pubblici ed altri privati. Ai pubblici sono destinati gli abbeveratoj e i lavatoj, i quali si trovano al Mercato vecchio, prendendo l' acqua dal trabocco della fonte della piazza grande, a S. Chiara governati dal trabocco della fonte di Pispini, a Ovile dentro e fuori della Città, i quali prendono l'acqua dai bottini particolarj delle prossime fonti, a Fontebranda, ai quali serve il trabocco di detta fonte.

§. LVI. Le acque del trabocco di Fontebranda e suoi recipienti subalterni, sono anche destinate da antica costumanza all'uso dei Macellaj per lavarvi le interiora degli animali. Nel recipiente della fonte del Ponte vi sono num. 5. dadi, che somministrano l'acqua al palazzo Bianchi, al Conservatotio del Refugio, alla casa Vaselli, al Monastero di Ogni Santi, e ad una casa che prima era l' Ospizio delle Orfane.

§. LVII. Tutti gli altri scoli o trabocchi e così pure i trabocchi degli abbeveratoj e lavatoj sono ricevuti dai particolari per loro usi privati. Altri servono a diverse arti, come dalla Fonte di Piazza alle tintorie, ed alla pescheria, e da Fontebranda alle conce e a diversi mulini, dei quali si parlerà in appresso. Non solo poi tutti i trabocchi rimanenti, ma in subalterno luogo ancora i

pri-

primi, sono generalmente distribuiti agli orti, per lo più dentro la Città, non toccando a quelli di fuori, se non che gli avanzi.

§. LVIII. Questo pertanto è il metodo, che si tiene nella distribuzione delle acque; altre cose resterebbero referibili alla maniera di regolare le acque e specialmente li scoli delle fonti, ma siccome in questo Articolo abbiamo dovuto toccare incidentemente qualche inconveniente su tal particolare, così nel parlare *ex professo* degli inconvenienti nel seguente Articolo, faremo conoscere il regolamento degli scoli.

ARTICOLO III.

Inconvenienti.

§. LIX. DUe sorte di pregiudizi possono temersi dalle acque. Chiameremo i primi intrinseci, per intendere quelli che dipendono dalla qualità originaria delle acque e dalle alterazioni che in virtù delle medesime possono recare alla salute di coloro, che devono adoperarle per loro ordinaria bevanda e per gli altri usi della vita umana. Diremo gli altri estrinseci, perchè provenienti da qualità avventizie o sia acquistate per colpa o incuria degli uomini. I pregiudizj estrinseci sono pure di due specie: altri immediati, cioè cagionati immediatamente dall' uso delle acque, altri mediati, quali sono quelli, cui le acque danno origine per mezzo dell'aria, che rendono infetta. Esamineremo pertanto le acque tutte della Città sotto questi diversi rapporti.

§. LX. I risultati delle analisi istituite ci acquietano sulla qualità delle acque e ci assicurano essere esse salubri, perchè non contengono elementi, i quali possano recar danno o per la loro quantità in complesso o per la qualità e quantità respettive di ciascuno.

§. LXI. Il totale del residuo ottenuto dall' evaporazione di libbre 30 dell' acqua della fonte di piazza è stato tra i 13 ed i 20 grani, e la quantità media gr. 16 $\frac{1}{2}$, ed il totale di quello ricavato da ugual quantità dell'acqua di Fontebranda ascende fra i 20 e 31 grani la cui media quantità è di gr. 25 $\frac{1}{2}$ (§. XXVI). Per assicurarsi che queste due acque devono porsi nel numero delle acque di loro natura salubri, basta farne un confronto col prodotto di altre acque tenute in gran pregio e da tutti per ottime riconosciute. L' acqua celebre d' Asciano condotta a Pisa per magnifico acquidotto, analizzata ultimamente dal Sig. Giorgio Santi P. Professore di quella Università diè circa $\frac{1}{3}$ di grano di residuo per libbra (1).

(1) Analisi Chim. delle acque dei Bagni Pisani ec. pag. 120.

La quantità di materia cavata per lo ſtesso mezzo dalle migliori acque di Roma, non esclusa quella di Trevi, fu tra gr. 2 $\frac{1}{2}$ e 3 $\frac{1}{3}$ per libbra (1). Cento libbre dell' acqua della Fonte di S. Croce di Firenze deposero, secondo l'Analisi del Sig. Pietro Giuntini, gr. 1242 $\frac{1}{3}$ di residuo e quella del condotto Reale nella ſteſsa quantità gr. 216, e così la prima gr. 12 $\frac{1}{2}$ circa per libbra e la seconda gr. 2 $\frac{1}{6}$ per libbra (2). Le acque di Upsal analizzate dalla mano maeſtra di Bergman (3), eccettuando l' acqua del pozzo trattorio molto più carica di componenti e riconosciuta per insolubile, diedero un residuo tra i grani 9 $\frac{1}{2}$ e i gr. 12 $\frac{1}{2}$ per misura Svedese, che ragguagliano all'incirca tra gr. 1 $\frac{3}{10}$ e gr. 1 $\frac{5}{7}$ per libbra noſtra. L' acqua celebre di Nocera di cui è nota la purezza e salubrità diè al Sig. D. Massimi (4) quasi un grano per libbra di materiali fissi.

§. LXII. Senza parlare dell'eccellenza dell'acqua di Pisa e di Nocera, che può appartenere ad altre cause, se in gran pregio sono ſtate sempre tenute diverse delle acque di Roma ed in particolare quella della fontana di Trevi, contuttochè superino molto le noſtre nella quantità dei loro componenti fissi; se l' acqua della fonte di S. Croce gode in Firenze alta riputazione, quantunque contenga dodici volte più di materia delle noſtre quando ne sono ſtate trovate più cariche; se non si ha scrupolo in Firenze sull'acqua di Montereggi del condotto Reale sebbene ritenga il triplo e più delle quantità medie trovate in quelle di Siena, e sappiasi dalle osservazioni di Targioni Tozzetti ne' suoi Viaggi (5) che produce una croſta continuata di Tartaro nei cannoni del condotto Reale di Boboli; se le acque di Upsal giudicate furono da Bergman dietro all' analisi eccellenti (6): le acque di Siena per rapporto al quantitativo in genere dei loro componenti fissi non potrebbero con giuſtizia dirsi di cattiva qualità e reclamano un luogo diſtinto tra le potabili pure e innocenti.

§. LXIII. Noi però non ci fermeremo a queſto solo dato. Vi sono delle acque scarse di componenti fissi, che nondimeno sono giuſtamente riputate insalubri, come per esempio l' acqua del Gianicolo

(1) Lancisi *de nativis Romani Cæli qualitatibus* Cap. XIII. Oper. Tom. I. pag. 74. & seq.

(2) Vedansi le cit. analisi del Sig. Giuntini in piè del Regolamento del R. Arcispedale di S. Maria Nuova di Firenze. Firenze 1783.

(3) Dissert. delle acque di Upsal §. III.

(4) Dell'acqua salubre e Bagni di Nocera pag. 37 e 38.

(5) Tom. I. pag. 415 ediz. seconda.

(6) Luogo citato §. V.

nicolo in Roma, la quale sebbene colla evaporazione lasci un residuo uguale a quello dell'acqua della fontana di Trevi, pure da Lancisi (1) è giudicata alle altre tutte inferiore in ragione dei principj graveolenti, che s' innalzano nella evaporazione e dai quali è costituito in gran parte il detto residuo. Egli è pertanto dover nostro di esaminare se mai le acque delle fonti di Siena ripetessero qualche considerabile imperfezione dall' indole malefica o dall' eccesso di alcuno dei componenti dell' indicato loro residuo.

§. LXIV. Tralascieremo di far parola dei sali, come pure particolarmente del ferro. Questi componenti vi sono in troppo tenui quantità, perchè possano venire in sospetto. Le materie, che principalmente sogliono accusarsi, sono quelle che danno origine alle grume o concrezioni tartarose nei canali e nei recipienti e perciò sopra tutto le terre, che vi stanno in dissoluzione per l' intermedio dell'aria fissa. Per quanto piccola si conceda la loro quantità, se nel loro corso sono capaci di generare grume considerabili, non dovranno fare lo stesso nei canali del corpo nostro? Questo infatti è il comune sospetto avvalorato dalla frequenza in Siena di tal sorta d' infermità (§. IV.) ed è l' importante oggetto di cui ci è comandato un' accurato e maturo esame col biglietto della Segreteria del R. Governo de' 18. Febbrajo 1792.

§. LXV. In schiarimento della questione è d' uopo primieramente avvertire, che se le acque delle fonti di Siena giungono a produrre grume considerabili nei loro condotti e ricettacoli; non contenendo che tenui quantità di materie tartarizzanti come dimostrò l' analisi; ne segue che la quantità e mole delle grume è dovuta, non ad un'eccesso di materia contenuta nelle acque, ma alle successive apposizioni di piccolissime quantità di tali materie prodottevi dal continuo passaggio dell'acqua. Questo riflesso conduce a render ragione di qualunque più considerabile quantità di tartarose concrezioni, che in un tempo dato possano essersi formate nei canali e recipienti; poichè scorrendo essa nei primi senza interruzione e rinnuovandosi nei secondi a misura che se ne cava, fatto il calcolo della materia tartarizzante contenuta, secondo le nostre osservazioni, nel volume di acqua passata nel tempo dato per il canale o recipiente, dove sonosi generate le concrezioni suddette, non vi è dubbio che vi sarà sempre nell'acqua una quantità di materia superiore a quella, che dovea impiegarsi nelle date concrezioni. E ciò si applica a quelle concrezioni, che si formano dalla fonte in giù o sia dopo il luogo, da cui è stata attinta l' acqua esaminata; perchè in quanto alle tartarizzazioni superiori ognuno vede che

(1) Luogo citato Cap. XIII. §. 21. Oper. pag. 76.

che sono ſtate prodotte da quel più di materia, che traſſe l'acqua dalle sue sorgenti e depositò depurandosi, prima di giungere al suo destino.

§. LXVI. Or se istituiscasi un simil calcolo sopra l'acqua, che si usa da ciascun' uomo, il risultato sarà ben piccolo per doverne temere alcuna cattiva conseguenza. Bisognerà prima detrarre l'acqua ſtata espoſta al fuoco, perchè essa o lascia la sua terra attaccata ai vasi, che si adoperano (§. IV.) o se in parte venga introdotta nel corpo nostro, non essendo più in ſtato dissoluzione non è suscettibile d' introdursi nelle seconde vie, ma deve andarsene con gli escrementi. Tutto adunque si reſtringe alla terra, che s' introduce, con l' ordinaria bevanda, la quale supponendo che senza punto scomporsi trasporti nei vasi del corpo e vi depositi tutta la terra che contiene; potrà lasciarvi $\frac{1}{3}$ o al più, rispetto all'acqua di Fontebranda, $\frac{2}{3}$ di grano circa di terra per ogni libbra di acqua bevuta, onde ognuno potrà in se ſteſſo calcolare la quantità di terra, che ogni giorno acquiſta con l'acqua che bee. Ma se terrà a calcolo la terra che introduce nel suo corpo con gli alimenti, vedrà che l'addizione repetibile dall' acqua è tanto piccola da non meritare considerazione, se non si voglia che la terra dell'acqua sia dannosa e quella degli alimenti innocente. Or siccome la maggior parte di queſta si rigetta con le materie escrementizie, per la ſteſſa ſtrada dovrà andarsene almeno una parte di quella dell' acqua, e per rapporto a quelle porzioni che giungono in circolo non dee perdersi di viſta che la terra è uno dei materiali inservienti alla nutrizione delle parti, le quali da essa riconoscono la loro durezza e consiſtenza e perciò perdendo ogni giorno debbono anche ogni giorno avere con che riparare le perdite. Onde dal convenirsi che con le acque s' introduce una porzione di terra non dee dedursene che dessa anderà piuttoſto a formare delle dannose concrezioni che ad impiegarsi nella nutrizione. Se così accadesse, niuno che facesse uso di acque contenenti terre in qualunque minima porzione potrebbe sottrarsi dai suoi perniciosi effetti e le concrezioni terree nei corpi animali sarebbero quasi tanto ovvie quanto gli uomini e gli animali che si abbeverano alle acque di sorgenti.

§. LXVII. Se una tal colpa attribuir si potesse alle acque di Siena niuno potrebbe ricusare ugual difetto a tutte le altre acque, nelle quali si contengono terre suscettibili di tartarizzare. Le acque delle fonti di Upsal non contenendo meno di $\frac{2}{3}$ di grano di terra calcaria per ogni libbra Toscana, giacchè ne escludiamo quelle del fiume, invano sarebbero ſtate giudicate da Bergman ottime ed eccellenti per beversi (§. LXII.). L' acqua Marcia tanto famosa nell'antica Roma perderebbe presso di noi la sua sublime riputazione, dappoichè sono ſtati trovati ne' suoi acquidotti insigni veſti-

gi

gi della sua qualità tartarizzante (1). L'acqua del condotto Reale di Firenze sarebbe tanto più nociva, quanto più abbonda, come poc'anzi si è veduto (§. LXI.), di materie dell' istessa natura.

§. LXVIII. Che se alcune acque, sebbene contengano più materiali fissi delle nostre, come per esempio quella della fontana di Trevi di Roma e quella della fonte di S. Croce di Firenze. (§. LXI.) pure non tartarizzano sensibilmente, ciò non dee sempre valutarsi come una perfezione. Le acque che contengono poca terra calcaria o altre, che vi stanno in dissoluzione per l'intermedio dell'aria fissa, se in vece contengano della selenite non daranno concrezioni tartarose, non deporranno nello stare in quiete esposte all'aria nè nella bollitura; non perciò saranno migliori, essendo la selenite uno dei principj più nocivi alla bontà dell' acqua, quello che più d'ogni altro scompone il sapone, impedisce la cottura dei legumi, e le rende insomma gravi e crude. Se l' acqua di S. Croce è scarsissima della prima qualità di materia, che forma il carattere delle nostre, in contraccambio contiene una buona e molto più copiosa dose di selenite, di cui le nostre sono esenti del tutto, senza però cessare di essere buona, e salubre.

§. LXIX. Quantunque l' esposte ragioni (§. LXV. — LXVIII.) potessero bastare per dileguare il timore, che la proprietà di tartarizzare osservata nelle nostre acque le renda molto proprie a produrre nei corpi le malattie di calcoli e renelle, non mancano però altre ragioni ancora più forti e decisive. Avendo noi a bella posta esaminato il tenor di vita di molti abitatori della Città afflitti dalle sopraindicate malattie, ne abbiamo incontrati non pochi, che avevano abitualmente fatto uso dell'acqua delle fonti, ma molti ancora che avevano sempre, cioè tanto prima, che dopo essere stati attaccati da queste malattie, adoperate acque di cisterna o sia di pioggia; nell' atto che un' immenso numero che non ha giammai adoperata altr' acqua, che quella delle fonti, non si sono accorti di averne contratta la minima indisposizione di salute. L'altra ragione ancora più forte si è, che le concrezioni lapidee conosciute sotto il nome di renelle, calcoli, e pietre delle strade orinarie, non sono in verun conto di natura terrea o calcaria, come volgarmente si suppone, o sia dell' istessa natura delle grume, che si generano dalle acque nei loro canali, ma sono composte intieramente da un'acido di particolar natura, chiamato perciò *acido litico*, quale acido non s' introduce dentro di noi dal di fuori, ma si genera nel corpo istesso per cause morbose interne e per una par-

(1) Fabretti *de Aquis & Aquæduct. vet. Romæ dissert. tres edit. secund.* 1788 pag. 10. Cassio Corso dell'acque antiche di Roma. Par. I. num. VIII. §. 13. pag. 71.

particolare disposizione di alcuni individui, di cui per anche non è conosciuta la natura e le circostanze.

§. LXX. Restano in tal guisa assolute le nostre acque da qualunque accusa fondata sopra le qualità loro originarie ed intrinseche. Non è così delle qualità estrinseche o avventizie (§. LIX.). La necessità di raccogliere quella maggior quantità d'acqua, che si può, per supplire ai bisogni della Città, la negligenza nel restaurare a tempo i bottini, il sistema di polizia vegliante il costume adottato e reso necessario dalla scarsezza per la distribuzione delle acque ed altre simili accidentali circostanze influiscono certamente a rendere meno perfette e meno buone le acque. Le imperfezioni delle quali s'intende parlare adesso, sono l'origine dei pregiudizi estrinseci delle acque, che da principio abbiamo detti immediati, perchè nascono direttamente dall'uso delle acque istesse, i quali divideremo in tre specie; i primi dipendono da difetti negli acquidotti, i secondi da immondezze che ricevono le acque in Città, gli ultimi dalla costruzione dei pozzi dei particolari.

§. LXXI. Alcuni pretendono che rechi pregiudizio alle acque lo scorrere esse nel bottino in canale o gorello aperto, a motivo delle immondezze che possono cadervi. Questo rilievo non è fondato; poichè non essendo i bottini accessibili se non dalle persone destinate alla loro custodia, non è da temersi alcun pregiudizio, quando sia posto rimedio agli altri difetti degli acquidotti. Lo scorrere poi in canale aperto giova grandemente alla maggior depurazione delle acque, perchè potendo facilmente esalarne molta aria fissa si dà luogo alla deposizione che si manifesta nelle concrezioni tartarose, senza la quale le acque giungerebbero alla Città molto più cariche della loro terra e sarebbero men buone.

§. LXXII. Ciò che merita correggersi nei bottini è tuttociò che concorre a comunicare alle acque delle materie estranee, come terre insolubili che le intorbidino, una troppa quantità di materie estrattive, e quegli ultimi residui della dissoluzione dei vegetabili quali si manifestano nelle acque e loro deposizioni sotto la forma di residuo insolubile. Queste materie si trovano nelle acque subito dopo le pioggie, perchè si altera alquanto la loro trasparenza, ed in qualche quantità vi si trovano in ogni tempo indicate da quei corpuscoli natanti, che vi si osservano, e dalla qualità del residuo della loro evaporazione e dalle sostanze componenti le concrezioni o grume. Non contrastiamo che una tenuissima quantità di tali materie non debba considerarsi come originaria alle acque non lasciando di deporne le acque più limpide nelle stalattiti che si formano ai loro primitivi stillicidj. Ma la quantità originaria per l'estrema sua tenuità non può contribuire alle acque niuna sensibile e valutabile imperfezione. L'origine dell'eccesso di tal materia

ria deve dunque considerarsi per avventizia, perchè nasce da quelli stillicidj, che si dovrebbero rifiutare, e si ricevono soltanto o per non commettere le spese necessarie ad escluderli o per procacciarsi una maggior copia di acqua. Questo eccesso è una imperfezione, perchè ne perturba colle particelle disperse nel fluido l' originaria limpidezza, contribuisce forse un poco ad alterarne il sapore, e le rende più facilmente putrescibili quando sono stagnanti. Ad accrescere questi difetti concorrono talvolta i frani che seguono dentro i bottini quando non siano tosto riparati.

§. LXXIII. Possono concorrere ad alterare le acque ancora le aperture ad uso di pozzo, per le quali fuori della Città da varii luoghi attingesi l' acqua immediatamente dal canale maestro, non essendo, per ciò che abbiamo sentito, infrequente che per tali aperture cadano nelle acque degli animali che v' imputridiscono e altre sozzure. Di questi pozzi uno se ne trova alla villetta del Cappuccino, altro alla villa dell' Ebreo, altro a S. Dalmazio alla villa già dei Sigg. Sozzini, ed uno al prato del Collegio Tolomei, il quale però ha un recinto di muro suo proprio formato dentro la vasca del galazzone.

§. LXXIV. Queste imperfezioni (§. LXXII. LXXIII.) sono di molto rilievo e meritano certamente di essere corrette, ma le acque ne acquistano ancora delle maggiori nelle pubbliche fonti, sulle quali è d' uopo che sia eccitata l' attenzione e vigilanza di chi è destinato a presiedervi. L'acqua di dette fonti si versa in un' ampio ricettacolo o vasca esposta al pubblico. L' acqua che ne trabocca dovrebbe essere relegata dagli usi immediati della vita umana. Non è però così. Abbiamo veduto di sopra, che per rimediare alla scarsezza di acqua si rimette in circolo per il Terzo di S. Martino l'acqua servita alla fonte di Piazza. Le acque che hanno servito alle fonti non possono considerarsi che come molto pregiudicate dalle materie, che sono gettate nelle loro vasche. Infatti ogni volta che si vuota la fonte di Piazza, e le altre della Città si trova nel loro fondo, oltre a molti sassi, un loto fetente. E quì torna in acconcio osservare che essendosi in oggi i Macellari diffusi per tutta la Città, non stanno più all' antico costume di andare a lavare le interiora degli animali al luogo destinato in Fontebranda, ma hanno introdotto di servirsi per il medesimo uso di tutti gli abbeveratoj, che più gli tornano comodi, e ardiscono, cosa stomachevole al solo doversi dire, di fare lo stesso uso dei recipienti di acqua buona delle pubbliche fonti, non rispettando neppure quella di piazza. Quelli che immergono nei recipienti medesimi i loro vasi in vece di riempierli al getto delle fonti, si abbeverano di queste acque immonde. Le acque che dal recipiente della fonte del Ponte, sono distribuite a diverse Case e Comunità religiose e per tutti gli usi della vita sono spesso infettate dalle accennate immondezze.

§. LXXV. Non dovevasi in fine tralasciar di avvertire che l'ordinario metodo di distribuire l'acqua ai particolari, cioè per mezzo di pozzi (§. XLVII.) che non hanno trabocco ed hanno, come suol dirsi, il *torna addietro*, perchè l'acqua in certe occasioni è soggetta a rifluire nel canale dei bottini, nuoce alla bontà dell'acqua obbligandola a rimanersene stagnante nei medesimi. Prescindendo da ciò che può solo pregiudicare alla vista ed alla opinione mediante la pellicola che si forma alla superficie dell'acqua e le grume che si attaccano alle pareti, egli è certo che questa circostanza dee anco molto pregiudicare al sapore dell'acqua tanto maggiormente, quanto meno frequentemente se ne attinge e più di rado vi si rinnuova. Oltre il confronto del sapore dell'acqua di fresco attinta da una fonte con quello dell'acqua di un pozzo poco frequentato, si renderà manifesta questa verità a chiunque si prenda la pena di assaggiare l'acqua attinta di fresco e risentirla poi dopo averla lasciata in vaso aperto per qualche giorno. Quell'acqua che in origine appariva al gusto vivace, grata, e leggiera, apparirà poi grave e crassa e priva della primiera vivacità. Pure questa seconda sarà trovata, se si esamini chimicamente, più pura della prima, perchè avrà deposto porzione dei suoi componenti più crassi. E poichè il sapor grato delle acque è una perfezione giustamente voluta e pretesa nelle acque potabili, non può negarsi che un metodo, che la distrugge, non sia da abolirsi per quanto è possibile.

§. LXXVI. Ci rimane da trattare di quei pregiudizj che provengono dalle acque della Città, ma mediatamente, cioè in quanto in conseguenza dell'uso, che se ne fa, ne riceve pregiudizio il suolo e l'aria della Città, di loro natura per questo lato dotati della maggior salubrità. Noi speriamo che ci sarà accordato un generoso perdono se nel trattare di un'argomento sì interessante il pubblico bene scenderemo forse ad un troppo minuto dettaglio e le nostre imparziali osservazioni si temeranno contrarie al particolare interesse di pochi possessori. Sospendano costoro un momento i loro timori, perchè il pregiudizio che essi temono per se potendo dar luogo ad altri pubblici non lievi inconvenienti la conclusione del nostro ragionamento, diretta al bene del pubblico a tutti gli effetti non può che ritornare in fine a vantaggio di ciascuno.

§. LXXVII. La Città di Siena risiedendo sopra una collina divisa in più diramazioni o branche, o piuttosto sopra un gruppo di colline insieme connesse e concatenate in guisa da formare un sol corpo, comprende nel suo recinto il principio di diverse piccole valli, per cui hanno scolo le acque e le pubbliche cloache. Nel basso di queste valli sono situati gli orti, i quali per la loro irrigazione profittano degli scoli delle acque della Città,

sì

sì delle pioggie, che delle fonti, ed inoltre di diverse vene e ſtillicidj, che in essi scaturiscono naturalmente o per via di bottini artefatti. Le principali di queſte piccole valli sono 1. quella di Ovile; 2. quella della Madonna del fosso o sia di Follonica; 3. quella fra la porta Pispini e la porta Romana, che chiameremo di Pispini; 4. quella fra la porta Romana e porta Tufi o sia di porta Giustizia; 5. quella di Fontebranda. Tutte sono tagliate trasversalmente dalle mura della Città. Dentro le mura alcune sono abitate ancora nelle coste e nel basso, come in gran parte quella di Ovile e di Fontebranda. Le altre sono circondate e chiuse dalle fabbriche dispoſte lungo il dorso delle colline, e sono nel basso coltivate per lo più a ortaggi. Tutte nella loro continuazione fuori delle mura sono ridotte a queſto genere di cultura.

§. LXXVIII. In queſte valli sì dentro, che fuori della Città per provvedere ai bisogni degli orti tanto d' inverno, che particolarmente d' eſtate si procura di adunare e ritenere tutte le acque che dalla Città vanno a scaricarsi nel ruscello, che scorre nel loro mezzo. Comunemente si costruisce un' ampio recipiente o conserva, o come chiamar si suole fontone, ove raccogliesi quella quantità d' acqua, che più si può, per supplire con quella in mancanza del giornaliero governo. Da queſto fontone passa l'acqua in altro recipiente coperto con tettoja, che serve per lavare gli erbaggi, di dove passa successivamente ai fontini o più piccoli recipienti regolarmente diſtribuiti in tutto l' orto per uso d' innaffiare. In molti luoghi sì la prima grande conserva, che i fontini subalterni sono murati, in altri sono semplicemente scavati nel terreno. In altri in mancanza o scarsezza di fontini, l'acqua è condotta alle diverse parti per mezzo di fosse e di solchi e dove si vuole raccogliere l' acqua per gettarla alle piante si scavano nel terreno delle piccole buche, chiamate dagli Ortolani bottaccioli. Terminata l' innaffiatura tutti queſti solchi e bottaccioli reſtano asciutti. Molti orti essendo lungo il ruscello, che scarica le acque pel mezzo alle piccole valli, praticano i loro coltivatori di fare all' acqua di tratto in tratto dei ritegni, acciò vi si raccolga e vi si trattenga ed alzi il suo livello, per condurla così ai fontini, o gettarla immediatamente alle piante.

§. LXXIX. Le acque, che dalla Città vanno a queſti orti sono:

1. I trabocchi delle fonti. Queſti se vanno direttamente agli orti vi portano acque fresche e pure, difficili a concepire alterazioni;

2. I trabocchi degli abbeveratoj e lavatoj, gli avanzi delle tintorie ec., i quali danno sempre un' acqua più o meno alterata e putrescibile;

3. Gli avanzi delle acque servite per le Comunità Religiose, formati per lo più di acque pregne degli spurghi delle loro cucine e cloache, le quali perciò o sono già fetide o sono facili a diventarle.

4. I trabocchi delle fonti, abbeveratoj, lavatoj ec. ricevuti prima nelle pubbliche cloache, ove s' impregnano delle materie degli acquaj, luoghi comuni, ed altri spurghi di particolari.

§. LXXX. Siccome le acque della Città, sebbene diligentemente raccolte, conservate, e distribuite, non sono bastanti ai bisogni degli orti, così si profitta di tutti li stillicidj, vi s' impiegano le acque di qualche fonte pubblica abbandonata e in qualche luogo sono stati scavati dei bottini particolari nel fianco delle colline per allacciare gli stillicidj interni e procurarsi così maggiore abbondanza di acque in tutte le stagioni.

§. LXXXI. Le acque raccolte come meglio si è potuto dai Possessori, allorchè sono abbondanti, pure, ed hanno un corso perenne, e si avverte di tener purgato dal loto e immondezze i fontoni e fontini, non sono capaci di recare danno alcuno o infezione all' aria in veruna stagione dell'anno. Ma se si lascino lungamente ristagnanti, molto più se siano originariamente impure acquistano più o meno i caratteri di acqua stagnante e palustre. Le acque che si tengono stagnanti in fosse o conserve scavate nel terreno, in parità di circostanze, più facilmente si corrompono. Quelle che contengono le saponate dei lavatoj, li spurghi degli acquaj e dei luoghi comuni, il sudiciume delle strade e delle cloache si fanno sollecitamente fetide e trovasi nel vuotarle fetido il loto da esse deposto in fondo ai recipienti. Ma se contengono in copia delle parti animali putrefatte, le acque sono nere e fetidissime sino ad incomodare gli ortolani e depongono un loto fetido e nero. Quando sono battute dal sole sviluppasi bene spesso dal loro fondo o loto molta aria infiammabile delle paludi; sempre poi ne danno gran quantità quando si smuova a bella posta il loro fondo.

§. LXXXII. Questo prospetto (§. LXXVII. — LXXXI.) che altro non è che l' epilogo delle osservazioni da noi fatte in tutti i luoghi ove vanno a scaricarsi e raccogliersi gli scoli delle acque urbane e suburbane (1), mostra già chiaramente come la Città di Siena debba essere soggetta agli effetti perniciosi di emanazioni simili alle palustri; nè può veruno maravigliarsi che i quartieri alle medesime più esposti soggiacciano ai danni delle malattie solite manifestarsi nei luoghi paludosi. Ma acciò questa verità apparisca colla massima evidenza è necessario procedere ad una descrizione parziale delle respettive valli, breve sì, ma sufficiente a far concepire la necessità di un rimedio pronto ed efficace atto a far cessare

(1) Queste osservazioni sono il risultato delle ricerche di tutti i Medici deputati, i quali si distribuirono i luoghi da esaminare. Furono poi queste da me replicate in tutto il circondario della Città tanto dentro che fuori delle mura.

sare una volta ed a svellere dalle radici un sì dannoso inconveniente.

§. LXXXIII. La valle di Ovile, in quella porzione che è compresa dentro la Città in parte abitata ed in parte disabitata, ha nel suo basso un'ampio lavatojo che non si vuota se non poche volte il mese, dal quale per esser molto frequentato e perciò pieno d'immondezze devono le abitazioni circonvicine soffrire non lieve pregiudizio. Negli orti che occupano la parte disabitata non mancano le loro conserve e fontini, che tutti contengono acque quasi ſtagnanti. Gli scoli poi tutti sono ricevuti in più cloache, i cui emissarj scoperti e di superficie ineguale offrono frequenti rimpozzi di acque ſtagnanti e morte, le quali, specialmente quando attesa la scarsezza dell'acqua e l'impiego che se ne fa di mano in mano dai Particolari non sono rinfrescate da nuove acque, s'imputridiscono a motivo delle grandi impurità che contengono e mandano un fetore considerabile. Queſti ristagni negli emissarj delle cloache, per lo più a ſterro, seguono particolarmente dove l'acqua ha delle piccole cadute a motivo dei ritegni naturali o artefatti, deſtinati ad impedire che si profondino. Fuori della porta Ovile vi è altra fonte con lavatojo, il quale spaglia all'intorno le sue acque, e queſte unitamente alle acque impure della Città danno origine ad un ruscelletto di acque, per lo più sporche e torbide, di lento corso, di letto ineguale, che scorre per il mezzo alla valle verso Ravacciano, dove le acque soſtenute da una serra fattavi per prenderne le acque per uso degli orti di Ravacciano nell'eſtate vi muojono, e quasi v'imputridiscono. I fontini dei mentovati orti che ricevono le acque indicate sono tutti ripieni di fanghi putrefatti.

§. LXXXIV. Quello spazio compreso fra la collina ovvero diramazione di collina, sopra la quale è poſto il Convento di S. Francesco e quella ove è situato il Convento di S. Chiara e che ha di fronte la cortina di Provenzano e la ſtrada detta della Madonna del fosso, è quello che da noi s'intende sotto il nome di valle di Follonica. Per il mezzo di queſta scolano molte acque veramente sporche e fetide, le quali nell'emissario comune delle cloache, che in esso si scaricano, soffrono i medesimi pregiudizi accennati parlando di simili emissarj della valle di Ovile. Negli Orti superiori alle antiche mura della Città di proprietà della famiglia Piccolomini fu coſtruita non sono molti anni un'ampia conserva scoperta, che riceve il trabocco del fontino di Provenzano ed insieme le acque delle ſtrade poſte sotto la fabbrica della Chiesa Collegiata. L'acqua tenuta quivi ſtagnante per valersene negli asciuttori eſtivi vien poi secondo il coſtume diſtribuita a diversi fontini ripieni sempre di un loto suscettibile di spargere nell'eſtate cattive esalazioni. L'ortolano istesso non ha saputo negare che il loto,

to, che si trova nel fondo della grande conserva suddetta, quando vā a terminare l'acqua, non sparga del fetore. Siamo ſtati assicurati da persona saggia, intelligente, e circospetta, che quando vide coſtruire quella conserva, presagì fin d'allora il pregiudizio, che ne sarebbe provenuto alla salute dei circonvicini abitanti e che il successo le fece subito vedere avverata la predizione. Questo fatto è una prova irrefragabile dei gravissimi danni prodotti da queſte raccolte e riſtagni di acque impure, nulla finora considerati, e che meritano certamente tutta l'attenzione di chi presiede alla pubblica salute ed i più efficaci provvedimenti.

§. LXXXV. Nella pendice di queſta valle per la parte del Convento di S. Francesco vi è un fontone; che riceve l'avanzo dell'acqua del medesimo Convento, che non essendo di grande ampiezza e lontano dalle fabbriche, non sembra di alcun pregiudizio. Nel basso poi della medesima, prossima alle moderne mura della Città esiste la fonte di Follonica, nel cui cratere si raccoglie sempre gran quantità d'acqua perenne, che di quì vien diſtribuita nelle molte fosse scavate nel terreno per l'irrigazione degli orti adjacenti. L'acqua riſtagna in fosse, e benchè continuamente rinfrescata dal trabocco della fonte, non lascia di prendervi qualità proprie delle acque ſtagnanti a motivo della gran quantità di deposizioni limacciose, che si raccolgono nel fondo di detti scavi, le quali per la quantità delle materie vegetabili, degli insetti, ed altre immondezze, che vi cascano, non mancano di putrefarsi. Queſto luogo è certamente frigido ed insalubre, ma le sue esalazioni, attesa l'abbondanza di acqua sempre fresca e nuova, non hanno molta forza e per la diſtanza ed elevatezza dell'abitato non sembrano avere molta parte nelle malattie che vi regnano.

§. LXXXVI. I disordini rilevati nelle due descritte valli di Ovile e Follonica non sono certamente di piccolo oggetto; ma sono poca cosa a confronto dei disordini osservati nelle seguenti.

§. LXXXVII. La valle, che chiamata abbiamo di Pispini, non è abitata nel basso. Al suo principio dentro la Città da una parte è circondata dal rione di Pispini, e dall'altra da quello di porta Romana. Nell'alto riceve il trabocco dell'acqua che dalla fonte del Ponte vā alla Casa Vaselli, la quale essendo pura e consumandosi di mano in mano, non reca alcun danno. Dall'altra banda è situato il fontone, che riceve le acque fetide e immonde del Conservatorio del Refugio. L'acqua contenutavi è quasi ſtagnante, ripiena di un loto neraſtro, spesso emanante il fetore di materie animali putrefatte. Queſta fonte riceve tutta l'acqua, che si rigetta dalla cucina del Conservatorio; e tutti li spurghi di lavature di carni e di utensili da cucina e da tavola, le rannate e saponate ec. vanno a scarisarsi in queſto fetido cratere. Con queſt'

acqua

acqua in tempo d' estate s' innaffia l' orto de' Sigg. Vaselli ed in tal tempo vien riferito suscitarvisi un fetore insopportabile. L'avanzo scorre per un fossetto per il mezzo degli orti inferiori dai quali si riceve nei proprj fontini, e tutti i luoghi lambiti da quest' acqua sono contaminati da un loto nero. Le acque rammentate sono nei tempi asciutti del tutto consunte dagli orti superiori e gl' inferiori resterebbero sprovveduti. Supplisce per questi dentro la Città un bottino scavato nel fianco della collina. L' acqua che scaturisce per il detto bottino è regolata nella solita forma per mezzo di conserva e fontini. Questi recipienti mal custoditi contengono nel loro fondo gran quantità di loto suscettibile di ribollire, come dicono, nell' estate ed emanare gran copia di esalazioni simili alle palustri. Il male di questa vallata è anco maggiore fuori delle mura.

§. LXXXVIII. Il proprietario del primo orto si fa una premura di ridurre in una conserva mal custodita tutte le acque che può raccogliere dall' emissario delle cloache della Città, che quivi sbocca, e dagli stillicidj e filtrazioni delle acque superiori mal contenute nei descritti ricettacoli. Il di più passa nel fossetto, che scorre nel fondo della valle. Dalla conserva si fa passare l' acqua nei fontini subalterni, dove non ha quasi moto e si raccoglie nel fondo un loto nocivo colle sue esalazioni. Peggiori ancora sono le condizioni del fossetto, il quale per mezzo di ridossi di terra vien ridotto in tante fosse separate, nelle quali si fa ristagnare l' acqua per gettarsi alle piante. Gli avanzi, che non mancano nell' inverno e nei tempi piovosi, ma che nell' estate e nei tempi asciutti non si permettono, formando un piccol ruscello scorrono sino a certe vaste conserve comunemente dette le *galazze*, destinate a trattenervi l' acqua nell' inverno per formarne ed estrarne il ghiaccio e riporlo nelle prossime diacciaje. Negli orti prossimi alle galazze sonovi altre acque di bottino, le quali dopo aver servito col solito metodo alla irrigazione degli orti, sono pure trasmesse alle stesse galazze. Queste dopo levato il ghiaccio restano piene d'acqua morta a guisa di due piccoli stagni, nei quali vegetano molte piante palustri. Negli ultimi di Maggio l' erbe erano foltissime, il fondo limaccioso, in cui senza resistenza fu immerso un braccio e mezzo di bastone. L' acqua stagnante e l' umido di queste galazze si svapora a misura che cresce la forza del calor solare nel tempo che molte piante v' imputridiscono prima e dopo esservi segata l' erba: Onde quantunque si riducano finalmente asciutte a segno di potervisi nell' Agosto, ripulite prima con la zappa, giocare alle bocce, pure prima che siano ridotte in questo stato possono considerarsi come paduline, le cui esalazioni non possono fare a meno di non recare alla salubrità dell' aria grave danno.

§. LXXXIX.

§. LXXXIX. Ancora più urgenti sono le circostanze della valle che incomincia dal mercato vecchio e si apre negli orti dell'antica, ora chiusa, porta Giustizia. La parte di essa compresa dentro le mura della Città è circondata dal poggio del Convento dei Serviti e dal rione di Salicotto per una parte, e dall' altra dal rione dell' Onda e dal poggio di S. Agostino. Immediatamente sotto alla piazza del mercato, dalla parte che guarda il mezzodì è situata la fonte del mercato, circondata posteriormente da muri e terrapieno. Tre sono le vasche che la compongono; le prime due sembrano fatte per abbeverare i giumenti, la terza molto lunga e larga serve ad uso di lavatojo. Nelle prime non è contenuta ordinariamente che poca acqua stagnante piena d' immondezze con fondo limaccioso. Il concorso delle lavandaje al terzo recipiente è in ogni tempo grandissimo, e per quanto sia molto ampio contiene poca acqua per la piccola profondità, la quale presto s' intorbida atteso l' uso che se ne fa ed in poco tempo si carica di sozzure a segno di tramandare cattivo odore. Se questo lavatojo si vuotasse ogni giorno ed anche dodici volte il mese come si dice all' oggetto di ripulirlo, il male che produce sarebbe minore, ma realmente per quanto si è osservato non si vuota che una o al più due volte la settimana specialmente nei mesi estivi per motivo della scarsezza dell'acqua, che appena supplisce a riparare il consumo che ne fanno le lavandaje, nella quale occasione si diffonde a molta distanza il pessimo odore, che ne emana e che in certi punti provasi intollerabile.

§. XC. Le pendici di questa valle sono irrigate per la parte di Salicotto dal tenue trabocco della fonte di S. Giusto e dagli avanzi di due trabocchi della fonte del Ponte, e per la parte dell'Onda dal trabocco di Fontanella nella maniera consueta. L' orto così detto dei Pecci, in oggi di proprietà del Nob. Sig. Giuseppe Venturi Gallerani acquistato dalla Compagnia della Madonna sotto lo Spedale, gode del benefizio di una gran peschiera posta immediatamente sotto la piazza del mercato, le cui acque sono buone e dolci, venendo da una sorgente abbondante sua propria. Infatti vi sta sempre molto pesce e vi si conserva a maraviglia. Questa peschiera col suo trabocco somministra l' acqua a tutto l' orto, alle cui diverse partizioni è condotta per canali murati, dai quali si manda nei fontini murati ovvero più comunemente nei solchi e bottaccioli preparati.

§. XCI. A quest' orto succede quello dei PP. Serviti ed a questo quello del Sig. Cav. Sansedoni. L' orto dei Serviti potrebbe godere l' avanzo dell'acqua dell' orto Venturi, se per lo più nell' estate non venisse tutta consunta dal proprietario. Si è perciò procurata anche in questo una vena sua propria, che appunto scaturisce

risce sotto la casa dell'Ortolano. Noi osservammo queſt' acqua affatto ſtagnante, trattenuta per farla salire al livello, che si desidera. Quindi la casa è resa inabitabile, muffandovi perfino il fieno, che si tiene nella sua parte più alta. L'acqua dell' indicato ſtagno passa nel fontino coperto e da queſto si diſtribuisce in tutto l'orto nel modo che segue. L'orto è diviso longitudinalmente in più parti. Fra una divisione e l'altra in luogo di viottolo si vede una serie di fosse scavate nel terreno e dispoſte in più ordini di linee longitudinali. L'acqua va direttamente alla prima fossa di ciascun' ordine e riempita queſta la susseguente gode del suo trabocco e così successivamente sino all' ultima. Queſte fossette sono sempre più o meno piene in tutte le ſtagioni. A misura che si vuotano per innaffiare, di mano in mano si riempiono. Così in un'area assai spaziosa coſtituiscono un vero ſtagno diviso in una moltitudine di piccoli crateri, le cui acque e fondo hanno tutti i caratteri delle acque paluſtri e sono suscettibili di cagionarne tutti i danni.

§. XCII. L' orto Sansedoni è in circoſtanze ancora peggiori. Privo di altre acque, esso prende l'acqua dalla cloaca o gavina del mercato, che riceve gli scoli e trabocchi della fonte di Piazza, dopo aver condite le tintorie e l' abbeveratojo e lavatojo del mercato vecchio. Per fare un' idea dell' indole dell'acqua adoperata in queſt' orto e de' gravissimi pregiudizi, che può recare dove sia trattenuta, è d'uopo premettere alcune notizie su quella cloaca.

XCIII. Essa è quella ſtessa, che ha il suo principio dalla Piazza grande e ne riceve le acque e le immondezze. Passa sotterranea sotto il pubblico palazzo e sotto la piazza di mercato vecchio di dove scende verso le mura della Città coſteggiando sempre il fianco della collina per la parte di Salicotto, e si scarica fuori per un'ampia apertura delle mura iſtesse. Sebbene la cloaca dentro la Città sia tutta sotterranea vi è però una larga apertura, che mette nella medesima sotto il lavatojo del mercato e nel suo corso per gli orti vi sono molti occhi e fenditure per le quali tramanda le sue fetide esalazioni. Presentandosi ancora da lontano al suo sbocco fuor delle mura non può esprimersi l' insopportabil fetore delle sue emanazioni, acute e penetranti a segno di risentirsene per un pezzo nelle narici le impressioni. Il loto che portano le putride acque di queſta schifosissima cloaca; che in ragione della sua schifezza può dirsi la cloaca massima di Siena, è nero e fetido al sommo. Non farà maraviglia se le acque e le esalazioni di queſta cloaca sono così infette, quando sappiasi che non solo vi si scaricano le immondezze della piazza e di altre ſtrade, le acque servite alle tintorie, quelle del lavatojo del mercato che serve a due terzi della Città, li scoli e spurghi del palazzo pubblico, e suoi

annessi, e di molti particolari per mezzo dei respettivi acquaj e luoghi comuni, ma ancora vi si getta il pesce invendibile e molte bestie morte e soprattutto i cadaveri dei cani, che specialmente in estate si fanno morire di veleno.

§. XCIV. Acque pregne di tali materie e per conseguenza nere e fetide sono quelle di cui l'orto Sansedoni gode la privativa e che nel medesimo ricevute e distribuite in più ordini di fosse, disposte come nell' orto dei Serviti, servono alla sua irrigazione. Queste acque depongono nel fondo delle indicate fosse un loto fetido e nero e vi acquistano i caratteri delle peggiori acque palustri.

§. XCV. Nella stessa valle immediatamente fuori delle mura vi sono due orti, uno del Conservatorio di S. Maria Maddalena, l'altro del Monastero di Ognisanti. Nel primo si vede un fontone che raccoglie le acque di uno stillicidio, che sarebbero sufficienti al bisogno dell' orto, se nei tempi asciutti non se ne seccassero le sorgenti. Allora sono obbligati di profittare degli avanzi dell' orto Sansedoni; quali avanzi! L' orto del Monastero di Ognisanti, non avendo altr' acqua, condisce tutti i suoi fontini con le acque della cloaca, che non sono state introdotte nell' orto Sansedoni. Quindi sono torbide, nere, fetide, e depongono un loto copioso, nero, e fetente. Simili sono le acque del fossetto, che scorre nel basso tra i due orti, e dove le acque provenienti dagli avanzi dell' orto Sansedoni e dei PP. Serviti sono, come in altri luoghi si è detto, trattenute in tante piccole artificiali lacune.

§. CXVI. La valle di Fontebranda è soggetta a simili inconvenienti a motivo delle acque impregnate di materie putrescibili nei lavatoj della biancheria e nei lavatoj delle budella, che dopo vanno alle conce ed ai mulini. I mulini trattengono l'acqua in bottacci, affine di raccoglierne tanta che basti per la mulinata, e facendo ristagnare un' acqua sì torbida e sporca, quando la gora è vicina ad esser piena si vedono comparire alla superficie spontaneamente delle bolle di aria, che può credersi aria infiammabile in minor copia ai due primi mulini, più ai due secondi, nel modo appunto, che si vedono svolgersi dalle acque minerali e dalle paludi. Siamo stati assicurati esservi spesso dei malati nelle famiglie dei mugnaj ed alcuni spesso morirne.

§. XCVII. Noi tralasciamo la particolar descrizione delle altre più piccole valli situate tra le altre branche delle colline, sulle quali giace la Città, perchè i pregiudizj che ne derivano o sono molto minori o da quanto si è detto delle principali facilmente si comprendono. Fermandoci adunque a questo passo ci sembra che dalla sola e semplice descrizione e quadro del metodo comune di adunare e trattenere le acque per la irrigazione degli orti debba ciascuno restar convinto che un tal metodo porta alla necessaria

con-

conseguenza di creare in un suolo naturalmente asciuttissimo e salubre un suolo simile a quello dei luoghi bassi, acquidosi, privi di scolo, e paluſtri; che le acque fatte riſtagnare a cagione delle piante che vi periscono e vi si macerano ed imputridiscono, degli insetti che vi muojono, e molto più quando erano già, prima di farsi riſtagnare, cariche d' immondezze e di materie vegetabili ed animali putrescibili o già imputridite, non solo coi loro vapori debbono rendere l' aria nel basso delle valli umida, uliginosa, crassa, e grave, ma inoltre colle esalazioni delle impurità che contengono e dei loro loti e fanghiglie, quando le acque vanno a diminuire ed a scuoprirsi il fondo ed il sole le percuote con tutta la sua forza, infettarla nell' iſteſsa guisa, che s' infetta l' aria dei luoghi paluſtri e recare all'aria pregiudizio tanto maggiore, quanto è più prava e maligna la qualità delle materie che imbrattano le acque.

§. XCVIII. Queſte nocive esalazioni non si limiteranno ad infettare soltanto a più o meno altezza la colonna di aria che sovraſta verticalmente ai riſtagni mentovati; ma per la naturale inclinazione delle materie contenute in qualsisia ſtato nei fluidi si diffonderanno in giro e anderanno ad infettare anco i luoghi adjacenti finchè spargendosi non giungano a quel grado di diradamento nell' atmosfera, per cui se non reſtano diſtrutti, divengono almeno innocenti, o per la loro gravità specifica maggiore o minore, per la cessazione o coll' ajuto del calor solare, non debbano o cadere a terra o sollevarsi nelle più elevate regioni dell' aria.

§. XCIX. Che se la massa di aria pregna di esse sarà messa in moto dai venti, quanto ciò sarà utile ripurgando la valle allorchè allontaneranno quella della Città dissipandola per le foci, altrettanto saranno insalubri e perniciosi quando incanalati al contrario per le medesime foci promuoveranno l' infetta massa contro la Città iſteſsa. Poichè essendo terminate e chiuse le valli da una corona di abitazioni, quelle che ne sono inveſtite non possono che risentirne grave danno.

§. C. Potrebbonsi, e dovrebbonsi forse corroborare queſte osservazioni con molte autorità di celebri Scrittori, e con molti non dissimili esempj. Ma se per una parte non ce lo permette la lunghezza ormai troppa di queſto scritto, per altra parte ci scusa il trattarsi di cose così note a tutti, che sembra sufficiente per qualunque persona non priva di ogni cultura enunciar loro i fatti ai quali si appoggiano per esser certi di riportarne l' assenso. Passeremo adunque a sciogliere alcune tenui difficoltà, che potrebbero insorgere, o piuttoſto a spiegare come le cause morbose dimoſtrate producano i loro cattivi effetti sulla salute degli abitanti.

§. CI. Se i descritti riſtagni di acque sembrassero ad alcuno

troppo piccola cosa per attribuire loro le febbri intermittenti non solo, ma eziandio le perniciose e putride, quali si suppongono regnare nell' estate e nel cominciar dell' autunno in molti rioni della Città; risponderemmo essere un fatto incontrastabile che nei tempi indicati regnino e siano endemiche in Siena febbri del tutto simili a quelle dei luoghi palustri, che si presentano cioè sotto due aspetti o di semplici intermittenti o di subcontinue acute e perniciose; che per necessaria conseguenza bisogna supporre l' esistenza e la presenza delle cagioni congrue e consuete, analoghe alle cagioni che producono le medesime febbri nei luoghi infetti dalle paludi; che qualora queste cagioni si sottraessero dalle nostre ricerche, sarebbe nondimeno gioco forza supporle e crederle benchè non conosciute; ma che se esse vi sono, si vedono, e si toccano con mano e quel che è peggio se ne soffrono pur troppo i danni, sarebbe stravaganza ricusare di riconoscerle sol perchè sembrano piccole, per doverne in vece ammettere altre occulte ed incerte.

§. CII. A coloro che si ostinassero in tale falsa e perniciosa massima faremmo osservare, che non occorrono vaste paludi per infettare piccoli tratti di paese, come occorrono per infettare una provincia intiera. La sfera della attività delle loro esalazioni è sempre proporzionale all'ampiezza del fomite, che le spande. Sarebbe un' errore attribuir loro nel primo caso un potere esteso quanto nel secondo; ma è ben giusto accusarle dei danni che si manifestano nei luoghi circonvicini e che sono investiti immediatamente dall'aria da esse infettata, spinta dai venti, come un sol fosso di acqua stagnante è sufficiente a rendere insalubri le abitazioni contigue (1). Ed infatti se ci fermeremo un momento per dare una

(1) Ecco alcuni fatti che provano in maniera decisiva che i particolari ristagni di acque producono i medesimi danni rispetto ai luoghi vicini e posti entro la sfera della loro attività, che le grandi paludi producono in una vasta contrada.

Lancisi riferisce quanto appresso della Città di Orvieto: *Quamquam vero Urbevetanus acr suapte natura salubribus adnumerandus sit, nihilominus propter cannabis præcipue macerationem, quæ multis ab hinc annis propius illam Urbem, quam olim, fieri cæpta est, ab Augusti principio ad exactum usque Septembrem adeo infestus evasit, ut per ea tempore multos Cives, & læserit, & perdiderit (de nox. palud. effluv. Cap. II. Oper. T. I. pag. 202.)*. Facevano appunto in Orvieto le fosse per la macerazione della canape, dappoichè da' luoghi ove suolevano farsi più anticamente di là dal fiume Paglia, per l'avarizia prima dei contadini e poi dei padroni stessi furono avvicinate alla Città, quello che fanno a Siena i fontoni, fontini, e fosse di acque stagnanti per uso degli orti. Remosse le fosse per consiglio di Lancisi e d' ordine di Clemente XI. disparvero le malattie.

La Terra di Asciano nel Sanese provava i più perniciosi effetti dell'aria infettata dalle esalazioni delle fosse destinate alla macerazione delle canape quando erano più vicine al Paese. In questo tempo osservò il Sig. Dott. Perotti dotto e valen-

una rapida occhiata al costume invalso presso quasi tutti i Contadini dell' agro Sanese, di fare intorno alle loro case simili raccolte di acque impure o per l' irrigazione degli orti o per abbeverare il

---

valente Medico di quella Terra, il quale su ciò mi ha favorite molte notizie, che, oltre a cagionare le malattie consuete negli adulti, era quell'aria durante la macerazione così nociva ai bambini che non riusciva salvarne quasi alcuno. Dopo essere state più anni sono allontanate le fosse il paese sarebbe meno incomodato dalle loro acque putride, se queste non si facessero scolare nel fosso che scorre ad esso contiguo, dove hanno un corso lento e spesso si fanno stagnanti. Ma quantunque questa Terra con le sue adjacenze sia soggetta per natura del suolo alle malattie prodotte dalle acque stagnanti si nota che i luoghi esposti alle immediate e permanenti esalazioni di coteste fosse in paragone degli altri sono più afflitti dalle malattie e particolarmente da quelle di genere putrido. Quindi il Sobborgo detto *Prato* più vicino alle mentovate fosse è fertilissimo di malattie putrido-biliose, di terzane maligne, colliquative, coleriche, dissenteriche ec. benchè goda una situazione assai più vantaggiosa del suo compagno detto *Camparboli* per rapporto alle acque stagnanti naturali a quel suolo. Nè per altra ragione che per essere investito dalle esalazioni dell'acqua stagnante di tali fosse il Convento dei PP. di S. Francesco, d' altronde posto in sito eminente e ventilato, soggiace nel tempo appunto della macerazione delle canape alle malattie che sogliono essere il prodotto delle esalazioni di acque stagnanti e corrotte. Ed è tanta l' influenza di questa cagione che le malattie da essa prodotte si riconoscono dalle comuni gastrico-biliose estive regnanti in quelle adjacenze per il loro apparato di putrescenza e malignità. E quì si avverta che parlando io dei danni di questa sorta di fosse non pretendo già di ripeterli dalle canape o dai lini che vi si macerano, come se queste comunicassero all'aria qualche speciale infezione. Io considero queste fosse come ricettacoli di aque stagnanti e putrefatte e come tali dannose alle salubrità dell'aria e cagioni di malattie simili a quelle dei luoghi palustri più perniciosi; sotto il qual punto di vista io credo che niuno avrebbe osato giudicarle innocenti, non esclusi quelli che col massimo impegno hanno intrapreso di dimostrare l' innocenza delle canape e dei lini in macerazione.

I danni che apportano i fossi e allagamenti intorno alle fortezze e Città fortificate, dei quali adduce molti esempj Michele Adolfo (*Diss. de aere, solo, aquis, & locis Lipsiens. pag.* 20.), provano questa stessa verità. *Presso a Livorno Castello Marittimo di Toscana*, scrive Leonbatista Alberti (Dell'Architettura ec. lib. 10. cap. 13.), *erano gli uomini sempre ne' giorni caniculari oppressati da gravissime febbri, ma fatto gli Abitanti un muro risconrro al mare si mantennero poi sani, ma dipoi messa l' acqua nei fossi per far l' edifizio più sicuro son tornati di nuovo ad ammalarvisi*. Nota Targioni Tozzetti (Ragionamento sopra le cause e sopra i rimedi dell' insalubrità d' aria della Valdinievole pag. 273.) che al *Complotto* delle esalazioni delle acque morte dello Smannoro e del piano del Casetto, unite a quelle del paduletto o acquitrino chiamato il *Neto attribuir si deve la causa delle febbri putride lunghissime e perniciose, che in certe estati divengono epidemiche fra i contadini e pigionali, che abitano nei poggi di Querceto, e di Scttimello, contuttochè tali poggi per se medesimi sieno dei più salubri della Toscana*.

Io restituii molti anni sono in Valdinievole la salubrità a diverse abitazioni che nell'estate erano infettate dalle acque ristagnanti negli scavi, d'onde si estraeva

il bestiame o per altri loro privati usi, ci sarà facile comprendere come essi allignino intorno a se delle cause d' infezione, che col concorso di altre cagioni non lasciano di bene spesso percuoterli.

§. CIII. Non è poi da stupirsi che non tutti gli abitatori delle contrade, che racchiudono una medesima valle siano egualmente attaccate dalle malattie, e che ne restino al contrario talora assalite persone che abitano luoghi più rimoti e diffesi. E primieramente è d'uopo riflettere che le esalazioni sparse nell' aria diventano tanto meno attive quanto più si diradano e si diradano tanto più quanto più in alto sono obbligate a salire ed a percorrere maggiori spazj. Perciò i rioni meno elevati saranno più soggetti ai loro danni di quelli situati più in alto, e le parti più lontane meno delle prossime,

---

va la terra per farne mattoni e lavori figulini, consigliando che si avvertisse di allontanarle. Fu fatto, e i mali cessarono. Mi sovviene di una casa di contadini nella stessa provincia, nella quale si ammalavano tutte le famiglie che andavano ad abitarvi e molti vi morivano di febbri intermittenti o delle loro conseguenze senza che si fosse potuto indovinarne la cagione. Esaminai tutto il circondario e non potei trovarvi alcuna causa d'insalubrità. Allora posi mente a certi chiusini di pietra nel piano terreno della casa e mi dissero essere di antiche buche da grano. Le feci aprire e si trovò che filtrava in esse l'acqua e che ne contenevano della stagnante. Persuaso di avere scoperta la cagione delle malattie indussi il proprietario a riempirle, e la casa fu risanata.

Michele Adolfo nell' Opera citata (§ 14 pag. 29) parla eziandio della insalubrità degli orti, ascrivendone però la cagione piuttosto ai concimi e ad altre circostanze, che alle acque che vi si tengono stagnanti. Targioni Tozzetti (luogo citato pag. 437.) oppone la salubrità *dei tanti e fertilissimi orti da erbaggio, che si vedono con piacere dentro ed intorno per ogni verso alle Città di Firenze, Prato, Pistoja, Lucca, e Pisa, dove s' innaffia e si concima quanto più si può anche con sostanze escrementizie d' ogni genere senza che gli Ortolani ed i Contadini o vicini Abitatori ne risentano pregiudizio di sanità.* Targioni Tozzetti ha ragione. Ancora la Città di Pescia, la quale non ha altro che orti intorno a se, che formano in gran parte la sua delizia e la sua ricchezza, secondo che mi ha convinto l'esperienza di cinque Anni, non risente da essi il minimo pregiudizio. Ma la loro irrigazione si effettua per mezzo delle acque sempre fresche e correnti del fiume Pescia che la divide nel mezzo. Fivizzano mia patria gode i vantaggi di copiosissimi orti nelle pendici ed alla falda della collina, su cui risiede, nè giammai si è potuto attribuire ad essi alcun fomite d' infezione a quella insigne Terra o agli ortolani e vicini. Ma sono gli avanzi delle sue fonti, sempre perenni e sempre abbondanti, che si adoperano con giusto reparto alla loro irrigazione. Facciasi altrettanto in Siena, come viene proposto, e i suoi orti insalubri diverranno tosto innocenti. Poichè non si tratta quì dell' insalubrità degli orti, si tratta dell' insalubrità delle acque tenute stagnanti per uso degli orti. Se gli orti Sanesi, ove sono tante acque stagnanti, sono insalubri, e gli orti della Città e Terre copiose di acque fresche e correnti per l'innaffiatura nulla hanno d' insalubre, a me pare che il confronto formi una validissima riprova di quanto si è procurato di dimostrare intorno alla insalubrità degli orti Sanesi.

sime, quelle investite direttamente dai venti più di quelle a cui l' aria infetta non giunge che per reflessione. Così prendendo per esempio la valle di Pispini il rione che scende alla porta Pispini per la parte degli orti generalmente sarà più infetto del rione di Romana e per essere situato più basso, e per esser' esposto più direttamente ai venti incanalati nella valle verso la Città; e nella valle di porta Giustizia il rione più infetto sarà Salicotto, perchè più vicino, più basso, e più direttamente investito dai venti.

§. CIV. Non avvi però dubbio, che nei rioni infetti mentre molti dovranno soggiacere alle malattie, altri potranno restarne immuni ed illesi. Si osserva infatti che le persone comode e i Monasteri spesso se ne difendono, mentre il basso popolo ne è grandemente afflitto. Le persone della prima classe stanno più riguardate, hanno abitazioni più elevate, ampie, e ventilate, chiudono la sera le loro finestre, sono ben muniti di vestito conveniente alle stagioni, hanno un nutrimento sano, vini ottimi, e mille altri comodi che bastano a garantirle. Il basso popolo manca generalmente di tutti questi mezzi. Il caldo che si rinchiude nelle anguste sue abitazioni l'obbliga a starséne giorno e sera fuori della sua casa allo scoperto, a dormire a finestre aperte, e soffre molti altri inconvenienti adattatissimi a farli imbevere i morbosi miasmi, a promuovere lo sviluppo della malattia, ed a renderla di peggior condizione. Se ciò non ostante alcuni rimangono illesi, può essere l'effetto del temperamento, di antecedenti disposizioni, e di un concorso favorevole di circostanze.

§. CV. Che se le malattie dello stesso genere assaliscono talvolta gli abitatori dei rioni meno esposti, per intenderne le ragioni senza dover supporre che i miasmi che s' inalzano dalle valli indicate giungano a trasfonder fin quà la morbosa loro influenza, basta avvertire, che se i quartieri che si abitano non sono soggetti all' azione di queste cause, possono però gl' individui imbeverne i seminj nelle parti infette; i piccoli germi imbevuti possono essere determinati a svilupparsi e ingranditi da diverse altre cause, come dalla soppressione dell' insensibile traspirazione, dai disordini nel cibo e nella bevanda, da passioni d' animo e simili. Inoltre ogni luogo, ogni privata abitazione può esser soggetta a cause congeneri a se particolari, d' onde nasce che i luoghi più elevati, più asciutti, più lontani da qualunque più piccolo ristagno di acqua, pure talvolta offrono delle febbri di genio intermittente, sporadiche per altro, o sia particolari a certi individui per cause private, e non già comuni, o epidemiche e endemiche.

§. CVI. E' quì non possiamo dispensarci dall' avvisare, che nella Città di Siena, prescindendo dalle cause più generali e comuni già estesamente spiegate, esistono realmente molte altre

cause

cause particolari, neppure totalmente private e individuali, che meritano tutta l' attenzione di chi presiede alla pubblica salute. Se facciasi un giro per i chiassi o vicoli della Città, si osserverà che nella maggior parte vi sono cementi, ceneracci, spurghi delle cucine, scoli d' acquaj, ed altre molte simili immondezze; che in molti si trattiene un'acqua sporca e quasi nera a motivo sì dell' ineguaglianza e incavi del suolo, che specialmente dei mentovati ingombri; che la povera gente per avidità di profittare della vendita del concio scava nei chiassi stessi delle buche sotto le respettive finestre, ove mette delle paglie a imputridire, gettandovi sopra a tale effetto dell' acqua sporca e tutti i loro spurghi ed escrementi e rivoltando di tanto in tanto il miscuglio, qual pessimo uso si riscontra principalmente nel chiasso detto Pulceto, ove in varie di queste fosse si è veduta l'acqua verminosa che emanava grandissimo fetore; nel chiasso, che resta dietro le case di Vallerozzi dalla parte degli orti, ove oltre la pagliaccia o paglione si osservarono per un lungo tratto delle foglie di castagno portatevi espressamente per ridursi in concio, con fetore grande; nel chiasso detto della Tartuca ed in quello di S. Sebastiano di sotto; come pure nei chiassi laterali sopra Salicotto dalla parte del Ghetto, ove si osservano presso a poco le stesse cose. Quello poi che si è detto riguardo all' acqua putrida e ferma, che si vede negli emissarj aperti delle cloache, che si scaricano per le valli descritte, si verifica appuntino in tutte le altre cloache della Città.

§. CVII. Possiamo pertanto concludere con tutto il fondamento ed in replica al Biglietto della Segreterìa del Real Governo de' 3. Aprile 1793. riferire, che le malattie del genere delle intermittenti palustri endemiche in Siena nei mesi di Luglio e di Agosto e che secondo il corso delle stagioni si manifestano or più presto or più tardi, ed ora più ed ora meno si prolungano nell'autunno, hanno un'origine totalmente estranea alla natura del suolo della Città, e tutta accidentale e fattizia dalle acque sì dei pubblici acquidotti, che di altra provenienza, raccolte in diversa guisa negli orti urbani e suburbani, che quivi si lasciano stagnare e imputridire.

ARTICOLO V.

Rimedj.

§. CVIII. AVendo fatta costare l' originaria bontà delle acque delle fonti di Siena (§. LX. — LXX.), non potremmo proporre di abbandonarle, a meno che per altri riflessi non si dovesse introdurre in Città altra acqua di perfezione ancora maggiore, nel qual caso convenisse escludere l'acqua buona per sur-

rogarle

rogarle l'ottima. Ciò che costituisce alquanto difettose queste acque è tutto estrinseco alla loro natura, e può correggersi o togliersi del tutto con i necessarj risarcimenti, coi regolamenti opportuni, colla vigilanza di chi presiede a questo ramo di amministrazione.

§. CIX. Le acque conducono materie impure a motivo 1. delle acque superficiali che in tempo di pioggie penetrano direttamente nei bottini; 2. degli stillicidj d' inferior qualità che s' insinuano per le fenditure fatte dalle radici degli alberi non solo nel duro tufo, ma ancora nelle volte e pareti murate; 3. dei frani che spesso succedono nei bottini nei luoghi non muniti di muro ove il tufo è meno duro (§. XII. – XIX. e §. LXXII.).

§. CX. La prima cagione (§. CIX. 1.) presenta la necessità di fare le pareti e volte murate impenetrabili dalle acque impure in tutti i luoghi, nei quali si osservano simili filtrazioni, e fare i dovuti risarcimenti ove a traverso le volte e pareti invecchiare e guaste s' introducano acque di tal natura indicate dalla sordida traccia, che vi lasciano. Molti certamente sono i luoghi che abbisognano di tal provvedimento e grave il dispendio; ma se si dovessero introdurre altre acque potrebbero abbandonarsi e serrarsi tutti i rami più guasti o non necessarj per dar passaggio alle nuove acque.

§. CXI. L' altra cagione costituita dal guasto fatto dalle radici degli alberi penetrate fin dentro i bottini (§. CIX. 2) esige due provvedimenti: il primo, che si resarciscano tutti i luoghi ove è accaduto il guasto accennato; l' altro, che si tronchi la strada a questi danni. Questo secondo supporrebbe la ripristinazione degli antichi ordini disponenti, che niun Possessore possa piantare e lavorare sull'andamento dei bottini alla distanza di un braccio e mezzo per parte, mai stati rimessi in osservanza, sebbene fossero ripubblicati con Notificazione del 6 Novembre 1755. Tale innovazione ha le sue gravi difficoltà. Ma a noi spetta proporre il rimedio di un sì grave inconveniente, non già di esaminare e superare le difficoltà che presenta l' esecuzione.

§. CXII. La terza cagione (§. CIX. 3) si toglierà coll' attenzione di supplire con muro dovunque il tufo manchi della necessaria consistenza e durezza.

§. CXIII. Tolti questi inconvenienti le acque saranno più limpide, non si altereranno in tempo di pioggia, non abbonderanno di corpuscoli natanti, daranno un tartaro più puro e bianco, la mole delle grume e tartarizzazioni sarà minore, perchè la mescolanza di tali impurità rendendo le grume di gravità specifica minore ne aumenta il volume in maggior ragione dell' aumento della massa.

§. CXIV. Affinchè poi le acque non vengano, come di leggieri segue attualmente, alterate da varie immondezze, conviene:

1. Che non siano permessi i pozzi fuori di Città, che prendono l' acqua direttamente dal canale o gorello del ramo maestro (§. LXXIII.). Provvedasi ognuno di una diramazione laterale, come tutti gli altri Proprietarj di simili pozzi.

2. Che dovendosi continuare nel sistema attuale siano ristabilite le fistole o dadi in tutti i pozzi dei particolari (§. XLVII.), e questo costume sia tenuto nella più rigorosa osservanza.

3. Che dove si possa o convenga si abbandonino e si chiudano le vasche aperte e pubbliche delle fonti (§.LXIV.), in modo però che possano aprirsi quando occorra attingerne gran copia di acqua per spegnere gl' incendj, alle quali passi subito e senza trattenersi l'acqua gettata dalle fonti medesime dalla vaschetta esterna destinata a riceverla.

4. Che dove o qualora non abbia luogo la riduzione predetta sia vietato con pene rigorose di gettare in dette vasche, o comunicare in qualsisia modo immondezze all'acqua contenutavi, rimettendo in osservanza con maggiori cautele l'articolo VI. del vegliante Regolamento di polizia.

5. Che ciò nonostante sia proibito rimettere in circolo le acque di dette vasche (§. XLV. LXIV.), nei canali delle acque buone per mandarsi ad altre fonti pubbliche o ai pozzi dei Particolari.

6. Che dette vasche siano ripulite metodicamente secondo il bisogno dal loto depositato nel loro fondo.

§. CXV. Con tali provvidenze e cautele si otterrà un'acqua più pura e buona di quella che tutti generalmente, ma specialmente alcuni abitanti, ed in modo particolare quelli che prendono l'acqua dal ramo del Terzo di S. Martino, hanno sinora goduta a motivo di varie sozzure acquistate. Tuttavolta essendo l'acqua di sua natura tartarizzante, e perciò scomponibile a misura che continua a perdere della sua aria fissa, trovasi costantemente in una tendenza alla scomposizione, colla quale si altera più o meno la sua limpidezza, e si perde quel sapor grato e vivace, che dà l' idea di una particolar leggierezza, quando i suoi componenti sono in stato di perfetta dissoluzione. Per riparare questo difetto non devesi adottare il sistema di far scorrere le acque per canale chiuso in tutto il corso dei bottini in pregiudizio della più facile loro depurazione (§. LXXI.). Nel distribuirla però alle fonti ed ai pozzi meglio sarebbe mandarle per canne serrate, dalle quali, come si osserva alle fonti dei cortili del Palazzo pubblico, suole uscirne più limpida e vivace.

§. CXVI. Per migliorare l' acqua dei pozzi dei Particolari (§. XLVIII.) conviene fare in modo che non debba ristagnarvi totalmente in guisa che entratavi una volta più non possa uscirne se non che a misura che viene attinta, ma all' opposto ciascun poz-

zo riceva copia di acqua corrente, la quale empiuto il recipiente debba altrove scaricarsi per il suo canale di trabocco o rifiuto. Sarebbe un consumo troppo grande se l'acqua di ogni pozzo ben provisto dovesse subito esser tolta intieramente dalla circolazione. In vista di una giusta economia di acqua dovrebbesi istituire quel numero di canali laterali o separati che fossero necessarj per i diversi quartieri e situazioni, ciascuno dei quali dovesse governare quella maggior serie di pozzi, che fosse possibile, mediante la solita contribuzione o tassa, passando di uno in un'altro fino all'ultimo, dal quale avesse il suo esito. Così ciascun pozzo goderebbe di un'acqua sempre nuova, limpida, di buon sapore, esente insomma dai difetti notabili, che attualmente vi si rimarcano (1).

§. CXVII. Con ciò (§. CIX. — CXV.) resterebbe provveduto alla maggior bontà, e possibile perfezione dell' acqua. Ma vi è un' altro articolo di somma importanza, quello cioè di regolare in modo gli usi subalterni delle acque, onde cessino i danni gravissimi che dal sistema o piuttosto abuso attuale risultano alla pubblica salute (§. LXXVI. — LXXXII.). Proponghiamo per questo oggetto:

1. Che gli abbeveratoj e lavatoj della Città, e soprattutto quelli del mercato vecchio (§. LXXXIX.) siano provveduti abbondantemente di acqua in guisa che non solo supplisca al consumo che ne fanno le lavandaje, ma soprabbondi a segno che il copioso trabocco basti a tener l'acqua dei lavatoj sempre rinfrescata e rinnuovata, e a dissipare le immondezze, delle quali s'impregna di mano in mano.

2. Che siano vuotati e ripuliti i lavatoj dalle materie depositate al loro fondo metodicamente secondo il bisogno.

3. Che sia vietato ridursi in vaste conserve le acque dei trabocchi delle fonti e lavatoj, e le altre in qualsisia foggia procurate, e tenervisi lungo tempo stagnanti, molto più quando si tratti di acque immonde e non rinnuovate continuamente colla mescolanza di acque pure, perenni, ed abbondanti.

4. Che sia vietata quella moltitudine di fontini e di fosse contenenti acque stagnanti e limacciose, giornalmente governate con acque scarse o sozze, atte a perpetuare le loro nocive esalazioni; dovendo chiunque brami coltivare a ortaggi i suoi fondi intorno alla Città servirsi di acque sempre correnti, pure, dolci, e giammai di acque impure e stagnanti.

V ij 5. Che

(1) Questo certamente sarebbe il miglior metodo per ottenere l'acqua dotata delle maggiori possibili qualità. Ma è d'uopo avvertire che l'esecuzione di questo progetto sarebbe, se non impossibile, almeno soggetta à tali difficoltà, che non deve far maraviglia se non sarà adottato. Si ottenga la copia necessaria delle acque, che è il fine principale, e si passi sopra volentieri a quest'oggetto secondario.

5. Che per le ſteſse ragioni a niuno sia lecito trattenere le acque nei fossi di scolo che servono di emissario alle cloache della Città sì dentro che fuori, nè fare altre raccolte di acque di qualunque genere, dalle quali potesse derivarne pregiudizio agli abitanti; e sia invigilato che le galazze per il ghiaccio siano vuotate intieramente dopo l' inverno, ne vi resti acqua ſtagnante.

§. CXVIII. Dopo avere espoſti i mezzi di rimediare alle cattive qualità avventizie delle acque e del suolo di questa Città (§. CIX. — CXVI.), ci si permettano alcune osservazioni e riflessioni dirette a spiegare come possano essere eseguibili le dette providenze, e quale sia poi il rimedio vero e radicale.

§. CXIX. Le acque di cui si tratta e particolarmente quelle del bottino della fonte di Piazza, che devono alimentare quasi tutti i quartieri della Città, hanno un difetto massimo ed essenziale, vero autore di quasi tutti gli altri inconvenienti, consiſtente nella notabile loro scarsezza, specialmente nei tempi asciutti. Chiunque abbia fatta attenzione alle prove di queſto difetto date incidentemente in più luoghi (§. XLV.LXXX.), ed agli effetti che ne derivano, avrà già preveduto, che alcuni provvedimenti propoſti possono eseguirsi senza accrescere il principale, e che altri suppongono necessariamenre la previa correzione di queſto.

1. I lavori e risarcimenti (§. CX. — CXII.) diretti a rimuovere le acque impure delle pioggie e quelle imperfette, cui fanno ſtrada i guaſti prodotti dalle radici degli alberi, non potrebbero fare a meno di non diminuire la copia delle acque, e di non eſtendere all' inverno e ai tempi piovosi molti disordini, che ora sono in pieno vigore soltanto negli asciuttori.

2. Il divieto di rimettere in circolo le acque delle vasche delle fonti pubbliche (§. CXIV. 5), e di concedere queſte acque ad alcuni particolari non è eseguibile senza prima accrescere la copia dell'acqua, a meno che non si credesse indifferente lasciare molte case ed un quartiere intiero in certe circoſtanze mancante di acqua.

3. Il metodo di ſtabilire un'acqua corrente a benefizio dei pozzi dei particolari per mezzo di rami di acqua laterali diſtinti dal canale maeſtro (§. CXVI.) suppone di sua natura una copia di acqua molto maggiore di quella che si consuma attualmente. Nel presente siſtema non si perde per mezzo dei pozzi, se non l' acqua, che ne viene attinta; nel nuovo metodo ciascun ramo deſtinato ad una serie di pozzi disperderebbe una quantità d' acqua proporzionata alla sua luce ed alla velocità del moto.

4. E' impossibile adottare il metodo di vuotare e ripulire più spesso i lavatoj e di assegnar loro maggior copia di acqua (§. CXVII. 1, 2), se l' acqua non vi è.

5. Può proibirsi che negli orti non facciansi ridotti e riſtagni arti-

artificiali di acque, ordinando che le acque dei trabocchi e scoli delle fonti, e le altre incanalate in essi siano mantenute costantemente fresche e correnti (§. CXVII. 3, 4, 5). Ma questo provvedimento distrugge la cultura degli orti e induce la total mancancanza di erbaggj nell' estate, altra sorgente di malattie non meno perniciosa di quella costituita dai ristagni di acque. Or è assurdo rimediare ad un' inconveniente con altro inconveniente maggiore. Il solo rimedio che si può adottare è adunque quello di somministrare agli orti in tutti i tempi l' acqua pura e corrente necessaria alla loro irrigazione, onde non sia d' uopo ricorrere al compenso delle conserve e dei ristagni, ed a trar partito da qualunque acqua immonda e corrotta.

§. CXX. Queste poche riflessioni (§. CXIX.) di tanta forza per se medesime e nella loro semplicità, che è inutile ampliarle con colori artificiosi, a quello che ci sembra, mettono nella vera e buona strada, mentre fanno conoscere, che per rimediare agli inconvenienti osservati nel regolamento ed uso delle acque delle fonti di Siena è assolutamente necessario e indispensabile provvedere prima la Città di nuove sorgenti di acque buone e perfette, ed in tale abbondanza, che possano supplire senza risparmio a tutti i bisogni ed usi.

§ CXXI. Questo rimedio vero, unico, efficace invano si spererebbe da nuovi lavori e risarcimenti nei bottini attuali. L'effetto non può essere che incerto, imperfetto, incostante, e precario. Bisogna trovare vene perenni di acqua a qualsisia distanza dalla Città, di acque pure e salubri, abbondanti in tutti i tempi, sufficienti per tutti gli oggetti, a tale livello da potersi introdurre in Città e provvedere tutte le sue fonti. Condotte queste alla fonte di Piazza sarà agevol cosa dare esecuzione ai proposti provvedimenti, che suppongono la copia delle acque. Sarà indifferente che le acque attuali diventino più scarse per causa dei risarcimenti diretti ad escludere le acque impure; cesserà perchè inutile il compenso di rimettere in circolo acque impure per rimediare alla totale mancanza; se la natura delle nuove sorgenti di acqua lo esigano sarà facile dare alla distribuzione delle acque ai pozzi dei Particolari quella nuova forma che più piaccia senza riguardo al maggior consumo, ovvero anche potrà sospendersi una tal riduzione qualora le acque non siano punto atte a produrre deposizioni tartarose; i lavatoj abbonderanno di acque; gli orti, che riceveranno continuamente i copiosi trabocchi e scoli delle fonti o immediati o mediati, offriranno alla Piazza i necessarj erbaggi senza bisogno di ricorrere alle acque impure e stagnanti.

§. CXXII. Oltre a questi benefizj primarj, se le acque non saranno introdotte a risparmio, al che ripugna una grandiosa spesa,

sa, potrà assegnarsene una porzione al ripurgamento delle cloache, potrà somministrarsi il comodo di acque correnti e separate per lavare le budella e altre immondezze della Città, potrà levarsi totalmente di circolo e di uso l' acqua delle vasche delle fonti quando non piaccia di chiuderle, e potrà darsi ai mulini acqua sempre pura e inalterabile acciò non ricevano danno dall' uso dei bottacci, e forse potranno godere di un' acqua corrente continua sufficiente a permetterli di macinare senza interruzione in tutti i tempi con gran vantaggio del pubblico. L' abbondanza dell'acqua potrebbe dar luogo a molti altri nuovi usi per edifizj di vario genere, dei quali comecchè non di nostra ispezione, si lascierà a chi spetta il pensiero di valutare l' utilità.

§. CXXIII. Non abbiamo creduto dovere estendere le nostre ricerche, non essendone incaricati, all'oggetto di determinare se a qualche distanza dalla Città vi siano sorgenti di acque della qualità che si ricerca, le quali possano condursi in parte elevata di questa Città. Siamo però stati assicurati dal Sig. Antonio Matteucci esservi principalmente sei sorgenti, cinque delle quali al di là del fiume Staggia ed una di quà dal detto fiume, che tutte prima della caduta della Repubblica erano state incanalate verso la Città. La prima e più prossima è quella del podere di Quietole, la seconda del podere del Romito, la terza del trogolo di Fonterutoli, la quarta del podere di Vignalino, la quinta del podere di Vignale, e la sesta la fonte della Stella. Le cinque ultime erano riunite alla prima per mezzo di due ponti-canali, dei quali si trovano tutt'ora le reliquie. Queste acque entravano nel ramo di bottino detto del Colombajo e venivano per i soliti bottini alla stessa fonte di Piazza, ed avendo provveduta la Città dal 1345 fino al 1526, in cui dai Fiorentini furono guastati gli acquidotti di Fonterutoli, come appare dalle notizie raccolte dal Gigli nel suo Diario Par. II. pag. 525, meritano adunque di esser prese in considerazione. Il diligente esame sulla natura e quantità delle acque indicate, o di altre, che potessero esservi, il risultato delle necessarie livellazioni, i calcoli delle spese per incanalarle alla Città, decideranno la scelta delle acque e l' eseguibilità del progetto, e l' assegnazione dei fondi necessarj deciderà l' esecuzione.

§. CXXIV. Siamo prevenuti che un progetto sì vasto, grandioso, e splendido non può essere l'opera del solo Pubblico Sanese. Queste imprese esigono il concorso della Potestà Sovrana, l' ajuto del suo Braccio autorevole, ed una parte dei suoi tesori. Ma siamo ancor più sicuri del generoso, magnanimo, e tenero cuore del clementissimo nostro Sovrano e Signore FERDINANDO III., per potere stare dubbiosi un momento, che fatta presente all'ALTEZZA SUA REALE l' urgente bisogno di un tal valido provvedimento per tron-

troncare dalle radici i mali della fedelissima sua Siena e convinta della realtà, non debba commuoversi grandemente e determinarsi a darle una delle più significanti riprove del paterno Suo amore e dell' animo Suo benefico col dare le più efficaci disposizioni per l' esecuzione ed usare verso di essa dei più generosi atti della Sua munificenza.

§. CXXV. Affinchè siano completi i vantaggi di queste provvidenze, è d' uopo nel tempo istesso togliere di mezzo le altre cause o abusi, che manterrebbero in qualche parte, come accrescono adesso, l' insalubrità dell' aria. Dopo i saggi regolamenti stabiliti per l' inumazione dei cadaveri umani ed acciò siano prontamente sotterrate le bestie grosse morte, non dovrà poi tollerarsi il pessimo abuso di gettare il pesce corrotto e i cadaveri dei cani ed altri piccoli animali nella gavina o cloaca del mercato, i cui perniciosi effetti ci è poc'anzi occorso di rilevare, onde sembrerebbe necessario, che indipendentemente ancora dagli altri provvedimenti che formano il principale oggetto di questa Relazione, fosse subito proibito il costume suddetto, che riesce assolutamente intollerabile quando si gettano in questa gavina i molti cani fatti morire di veleno per timore della rabbia, e fosse ordinato che tanto il pesce invendibile, quanto tutti i cadaveri delle bestie piccole fossero sotterrati in altro luogo da destinarsi. Conviene poi che sia proibito che nei vicoli o chiassi della Città si gettino cementi, ceneracci, ed altri simili ingombri, come pure spurghi di cucine ed acquaj, escrementi, ed altre immondezze, e molto più che siavi tenuta della paglia e altre materie per macerarsi e ridursi in concio coll'ajuto degli spurghi suddetti e delle acque trattenute, ordinando che sia rimesso nella piena e più rigorosa osservanza in questa parte il regolamento vegliante di polizia; al quale effetto stimeremmo molto vantaggioso, che dal Magistrato Civico si destinasse annualmente una Deputazione permanente di due Soggetti scelti dal suo Corpo, la quale unitamente ad uno dei Cancellieri Comunitativi dovesse presiedere alla retta e puntuale esecuzione degli ordini relativi a questo ramo sì interessante la pubblica salute.

E queste sono le osservazioni, riflessioni, e proposizioni che dopo mature considerazioni ed esami abbiamo convenuto con sentimento unanime di umiliare rispettosamente al Reale Governo in obbedienza ai comandi statici partecipati.

Siena li 3 Agosto 1793.

Domenico Battini P. Prof. di Medicina Pratica.
Biagio Bartalini P. Prof. di Bottanica.
Gio: Niccolò Semensi P. Prof. di Medicina Teorica. } Deputati.
Giuseppe Lodoli P. Prof. d' Istituzioni Chirurgiche.
Galgano Petrucci Medico Fisico.

NOTIZIE ISTORICHE

Sopra gli acquidotti delle fonti di Siena in schiarimento ed illustrazione della precedente Relazione.

§. I. L'Opera degli acquidotti delle fonti di Siena da tenui principj crebbe a poco a poco nel secolo decimoquarto a quella magnificenza e splendidezza, che oggidì ancora mantiene con stupore di chiunque ne conosce l' estensione e l' artifizio. Avanti il fine del decimo secondo secolo la Città traeva partito da tutte le piccole vene di acqua che si mostravano nel suo circondario. Ovunque speravasi di ottenere acqua si facevano gallerie o vie sotterranee, chiamate volgarmente in Siena *bottini* o corrottamente *buttini*, che per linea leggermente inclinata s' internavano nel poggio ad una limitata profondità, pel cui mezzo si raccoglievano e si riunivano le acque, che in qualunque modo, ma per lo più per filtrazione e stillicidio potevano introdurvisi, e si conducevano al luogo destinato, ove erigevasi una fonte. Nè altrimenti, se ben si esaminano le antiche memorie e i più vecchi Statuti della Città, sembrano nate le numerose fonti situate nel suo recinto o nelle sue adjacenze; tra le quali sussistono ancora dentro la Città la così detta Fontanella situata sotto la fabbrica e clausura dei PP. di S. Agostino, Fonte nuova nel piano di Ovile a piè di Borgo-franco, la fonte di Follonica, la sorgente della peschiera esistente negli orti detti dei Pecci, in oggi di proprietà della Nob. Famiglia Venturi-Gallerani, posta sotto il Mercato vecchio; e fuori delle mura l' antichissima fonte di Pescaja; la fonte fuori della porta Ovile, la fonte a piè della costa fuor di Porta S. Marco, quella fuori della porta Pispini; per tacere di quelle, di cui non rimangono che i vestigj, come della fonte delle Sperandie che secondo Teofilo Gallaccini (1) è quella stessa vena d'acqua che scaturisce nella Clausura delle Monache della Madonna dette le *Trafisse*, la fonte della Vetrice fuori e prossima alla porta Fontebranda, la Fonte benedetta fuori di porta S. Marco ec. Hanno infatti queste fonti ciascuna il proprio e particolare bottino, che loro somministra l' acqua dal fianco delle contigue colline; tutti però egualmente

(1) Della natura e della forza dell'acqua corrente, cadente, agitata, spenta, e ritenuta. MS. originale esistente nella Libreria dell' Università di Siena al pluteo XXVI. D. 38.

mente negletti ed abbandonati alla loro sorte, poichè il Pubblico non sembra interessarsi che dei bottini di Fontebranda e della fonte di Piazza, come quelli che conducono maggior copia di acqua più specialmente destinata agli usi pubblici più interessanti e di più generale utilità.

§. II. I bottini di queste due fonti sono i soli che si prolunghino fuori della Città a considerabili distanze, dividendosi in più rami per raccogliere le acque, che quasi piccole vene filtrano tra i diversi strati del terreno e che trovando questi vuoti artificiali quasi spontaneamente vi distillano. Ogni altro genere di scaturigini suscettibile di tradursi e riceversi in questi vuoti trova di quì aperta la via alle fonti della Città, e serve ad accrescere la mole delle acque. Fu per verità un' impresa ardita e di incertissimo esito quella di provvedere la Città con un metodo così precario, poichè il solo cangiamento della superficie e le stesse coltivazioni in ragione delle direzioni diverse che si danno alle acque, secondo l' interesse dei proprietarj, può in un punto far perdere il frutto di spese grandiose e di cure immense impiegate nella costruzione di tali bottini senza che il Governo possa lusingarsi di porvi un riparo mediante una lodevole legislazione; ma non fa meno onore allo zelo e magnanimità di quei valorosi Cittadini, che governavano in quei tempi di prosperità la Repubblica. Essi vedevano aumentarsi ogni dì più la popolazione, fiorire le arti, estendersi la mercatura, erigersi fabbriche di panni lani, di concerìe, di tintorìe, ed altre simili, e crescere a proporzione il bisogno di acque copiose, a cui non potevano supplire le povere fonti alimentate dagli stillicidj locali. Fu in quel tempo che per mezzo di profondi pozzi fatti scavare nella parte più elevata della Città e nelle vicine coste si dettero a cercare l' acqua perduta di Diana, così detta, secondo Teofilo Gallaccini (1), dal nome di un' antichissima fonte che era in Castel Vecchio, indotti dall' antica popolare tradizione, che sotto la Città di Siena scorresse un fiume; per la quale mal riuscita ricerca vennero da Dante Alighieri scherniti in questi versi:

Tu li vedrai fra quella gente vana
Che spera in Telamone, e perderalli
Più di speranza, che trovar Diana (2).

(1) Luog. cit. E Giugurta Tommasi (Hist. di Siena P. I. pag. 54) così s'esprime: *A questo proposito oggiongono, che fu già cercato un rivo di acqua corrente sotto la Città, essendo stato ivi cavato molto profondamente; e lo chiamarono la Diana; applicando il desiderio loro all'honore di quella bugiarda Dea. Quest'opera cominciata da'nostri antichi, e dipoi ripigliata da' successori, fu dismessa, desperandosi, come si crede, di arrivarla, perchè quell' acqua così profonda non si poteva tirare in alto.*

(2) Giugurta Tommasi usa con molto calore del diritto di rappresaglia contro Dante. Vedasi il luogo citato.

Nella quale impresa però erano i Sanesi più da lodarsi che da schernirsi ; poichè se noi ponghiamo mente alla situazione della Città era di grandissimo interesse procurare l'acqua nelle parti più elevate, d'onde poi si potesse alle inferiori a grado a grado condurre. Che se non si potrebbe mai senza malignità darli debito di non essere riusciti nel loro intento, molto meno si avrà ragione di farlo quando è nota la mediocrità delle somme impiegate in così fatte ricerche (1), nè si ignora che ebbero di quì origine varii pozzi (2), che sono tuttavia in uso, e negli assedj contribuirono a render vane le premure dei nemici nel rompere gli acquidotti e deviarne le acque.

§. III. Non fu così dei tentativi fatti per accrescere l'acqua di Fontebranda. Questa fonte era situata molto più in alto nella costa, ove poi fu eretta la fabbrica dell'arte della lana (3), e forse non gettava altra acqua che quella che dal suo particolare bottino veniva raccolta dentro il poggio di S. Domenico. Noi sappiamo dall'iscrizione apposta che nel 1193 fu innalzata quella magnifica fonte che in oggi ancora sussiste, e ciò avvenne probabilmente dopo esserne state arricchite le vene con fare nuovi bottini, i quali si producessero fino al poggio di S. Prospero, ove poi fu fabbricata la Fortezza, e più oltre; poichè nella Cronica di Bondone e Bisdomini (4) all'anno 1193 si legge: *Fontebranda si fè in quest' anno, ed è bella fonte abbondante più che fonte di quei paesi di Toscana*. Ma contuttociò non si stancarono mai in seguito i Presidi del governo di Siena di accrescere l'acqua a questa fonte in vista della utilità che recava alle diverse arti, le quali andavano ogni dì più stabilendosi in Siena ed aumentando. Ci mancano per verità le più sicure notizie fino all'anno 1249, perchè mancano del tutto i libri pubblici originali, dai quali potersi raccogliere. Ma dal Libro detto il *Caleffo vecchio* apparisce, che nel 1225 furono fatti i bottini per poter mandare l'acqua dalla fonte di Pescaja in Fontebranda, come dal pagamento di lire 850 fatto a questo effetto dal Camarlingo di Biccherna, e d ivi registrato sotto il detto anno a fog. 156; e sotto l'anno 1246 a fog. 254 si trova un pagamento di lire 50 *per condurre le vene in Fontebranda*. Subito poi al

(1) Al libro XLVIII. delle Deliberazioni del Consiglio della Campana a fo. 36 apparisce che l'anno 1295 fu approvata la spesa di lire 70 erogate dall'Operajo del Duomo nello scavo per cercare l'acqua di Diana, e dal medesimo documento si rileva essere stata fatta altra volta simile ricerca. Dante scriveva poco dopo a questo tempo.

(2) Gallaccini, Tommasi nei luoghi citati.

(3) V. Tommasi luog. cit. pag. 169.

(4) Vedi il Vol. esist. nella Libreria dell'Università al plut. XXVI. E. 9.

al primo Volume esistente delle deliberazioni del Consiglio Generale detto della Campana a fog. 41 t.° si legge approvata nell' anno 1249 la spesa di lire 500 per il bottino di Fontebranda secondo l' ordinazione dei Deputati sopra gli acconcimi delle fonti; e nello Statuto, che secondo la combinazione di alcune date fu compilato tra il 1295 ed il 1305, è riportato l'ordine di spendere 500 lire ogni anno nella manutensione e ritrovamento di nuove vene per Fontebranda. Nel 1337 apparisce un decreto (1) di spendere annualmente cinquanta lire per la restaurazione e accrescimento delle acque di Fontebranda, e si dà facoltà agli Operaj di condurvi altre acque e farle ritrovare nei terreni di chicchessia, affine di farvele pervenire più presto e meglio. E nel 1389 a' 16 Dicembre fu deliberato dal Consiglio della Campana (2) che il Camarlingo di Biccherna con bottini sotterranei procurasse di condurre in Fontebranda l'acqua di Mazzafonda che si deviava nella Staggia a spese in parte dell'Arte di lana, in parte dei possessori dei mulini, ed in parte del Comune di Siena; e nel 1398 a' 31 Maggio fu dal Concistoro (3) determinato che il Camarlingo ed i quattro di Biccherna e Berna di Torino Operajo dell'acqua potessero spendere 900 fiorini d'oro per condurre l'acqua da Mazzafonda a Fontebranda, de' quali 300 dall' Università e Arte di lana, altri 300 dai padroni dei mulini, da esser bonificati, e 300 dalla Biccherna.

§. IV. Mentre i Sanesi erano intenti a moltiplicare le vene dell' acqua a Fontebranda si accese in loro ardente brama di fare una fonte nella piazza del Campo o sia nell' attuale gran piazza, la quale non cedesse a Fontebranda nell'abbondanza di acqua e la superasse per la nobiltà del luogo e l'estensione degli usi. Eravi antichissimamente in questa piazza una fonte, perchè negli Statuti di Siena del 1270 distinz. III. pag. 18 se ne fa menzione sotto il titolo: *De buttino qui est in campo fori*; dove si dà facoltà a chiunque di riattarlo a sue spese a condizione che non si guasti la piazza. Ma da questo modo di esprimersi si conosce che era questa fonte alimentata da scarsissime acque somministrate da un bottino particolare nell' istessa guisa che delle altre fonti si è detto. Non Agostino ed Agnolo Scultori ed Architetti Sanesi, come narra Giorgio Vasari (4), uomini d' altronde di gran valore, stimati ed impiegati dalla Repubblica nella direzione delle più cospicue fabbriche a quel tempo innalzate; ma Jacomo di Vanni d' Ugolino fu

X ij quel-

(1) Questo Decreto senza citare il luogo da cui è stato tratto è riferito dal P. Maestro Guglielmo della Valle = Lettere Sanesi = Tom. I. pag. 230.

(2) Tom. XX. fog. 129.

(3) Delib. del Concist. Tom. CXCIV. fog. 13.

(4) Vite ec. ediz. Sanese Tom. II. pag. 127.

quello che concepì il progetto di condurre acqua abbondante alla piazza del Campo, e s' incaricò dell' esecuzione. Si legge ancora tra le deliberazioni del Consiglio della Campana (1) sotto il dì 16 Dicembre 1334 l' approvazione del contratto ſtabilito tra il Comune di Siena e Maeſtro Jacomo di Vanni d'Ugolino per condurre l'acqua a Fonte Gaja per bottini sotterranei nella medesima quantità di quella che veniva attualmente in Fontebranda, senza toccare quella di detta fonte o di altre fonti della Città, e con altri patti e condizioni ivi enunciate, per il prezzo di 6000 fiorini d' oro. Jacomo si messe toſto all' impresa, ma non ricevendo dal Comune di Siena le somme convenute vi spese tutto il suo senza averla condotta a termine; onde nel 1337 fu coſtretto a ricorrere al supremo Consiglio della Repubblica facendo un quadro compassionevole delle sue circoſtanze e chiedendo che qualora si volesse continuare il lavoro fosse dato un provvedimento efficace, specialmente con eleggersi una Deputazione che esaminasse e provvedesse, ed avesse facoltà di fare quanto potesse occorrere per l' esecuzione, altrimenti poi egli fosse liberato da ogni obbligo (2). Lo ſtato infelice, a cui era ſtato ridotto Maeſtro Jacomo per questa impresa, è pur rammentato nell' esposizione al Consiglio di una petizione fatta dal figlio Giovanni l'anno 1349 di succedere al padre già morto con queſte memorabili parole: *Qui nisi quod paterna pia manus prædecessorum vestrorum qui in officio præsidebant extendisset clementiam suam non tantum potuisset dici lesus sed ipse Magister cum tota familia sua fuisset deradicatus* (3). Accolse benignamente il Consiglio le rimoſtranze di Jacomo, e sotto il dì 28 Aprile dell' anno ſteſso 1337 (4) ordinò crearsi la propoſta Deputazione munita della necessaria autorità acciò l' opera fosse sollecitamente ultimata. Queſta Deputazione dovette poi essere eletta dai Nove del Governo; poichè nell' Archivio delle Riformagioni si conservano i libri concernenti queſto lavoro, segnati colla lettera B e coi numeri 183, 184, 185, il secondo de' quali e primo dell' uscita, intitolato come appresso, ne indica e le persone e il tempo, in cui cominciarono il loro uffizio: *Al Nome di Dio Amen. Qui appresso saranno scritte le spese che si faranno per cagione dell'acqua che de' venire nel Campo di Siena al tempo di Fredi de' Neri de' Ponzi; Naddo di M. Stricca, Cecco di M. Bindo Signori eletti da' Sigg. Nove, e di me Francesco di Mejo Figliani scrittore a dì 16 di Febbrajo* 1339 (5). Per opera della qual

(1) Tomo CVI. fog. 66.
(2) Delib. del Cons. della Camp. Tom. CXX. a fo. 67 e seg.
(3) Deliberazioni del Consiglio della Campana Tom. CXLVII. fo. 38.
(4) V. Deliberazioni del Consiglio della Camp. Tom. CXX. fo. 67 e seg.
(5) Ved. il Libro di Biccherna segnato B num. 184 alla pag. 2; una simile intitolazione si legge al Libro dell'entrata segnato B num. 183.

qual Deputazione dovette l' impresa dei bottini esser data a rischio solidalmente ai tre Maestri, i cui nomi leggonsi nella prima partita di questi medesimi libri registrata come appresso:

In prima a Maestro Lando Pieri
Maestro Agostino Giovanni
Maestro Jacomo di Vanni
e quali allogaro e tolsero a rischio di fare venire nel Campo di Siena quella quantità d'acqua che nella carta si contiene fatta per mano di .... Notajo per seimila fiorini d' oro saranno scritti partita per partita come io pagherò ebbero a dì 16 di Febbrajo contanti per convertire e dispendere nel sopraddetto lavorio trenta e otto lire e 5 soldi ec.

§. V. Da questa impostatura di partita e dichiarazione prende argomento Uberto Benvoglienti (1), uomo per altro dottissimo e delle patrie cose investigator diligente e peritissimo conoscitore, di riprendere Giugurta Tommasi, perchè nelle sue Istorie (2) afferma che Maestro Jacomo di Vanni fosse il solo e l' unico Maestro a dare opera di condurre l'acqua in piazza, stimando egli che tale onore si debba ai tre nominati Maestri che in società presero il lavorìo. Ma dai documenti citati chiaramente apparisce che Maestro Jacomo di Vanni fu in realtà il primo ad immaginare e condurre molto innanzi quest' opera, avendola soltanto sospesa per le ragioni enunciate, le quali per la prosecuzione e compimento dovettero anche obbligarlo ad associarsi gli altri due Maestri o perchè solo non aveva forze o perchè volle mettersi al coperto dal rischio. Del rimanente nella stessa relazione del suo citato (§. IV.) ricorso del 1337 fatta al Consiglio (3) si espone la sua speciale istanza nel caso che si prosegua il lavoro: *Quod ad hæc dictus Jacobus salario & modo hactenus ordinatis per dictum Comune (Senarum) requiratur potius quam alius Magister*, soggiungendo: *cum idem fuerit dicti operis* principium & repertor. E nello Statuto di quel tempo (4) si

(1) V. un suo MS. esistente nella pubblica Libreria dell'Università di Siena nel Volume XXVI. A. 1.

(2) Parte II. pag. 667.

(3) Delib. del Cons. della Camp. Vol. CXX. fo. 67 e seg.

(4) Questo Codice degli Statuti o Leggi veglianti in Siena viene comunemente riputato del 1355, perchè porta in fronte il nome dei Dodici, i quali in quest'anno, scacciati i Nove, furono preposti al Governo della Repubblica. Ma trovandosi che Jacomo di Vanni era già morto nel 1349, e dovendo lo Statuto essere scritto durante la di lui vita, è chiaro che deve essere anteriore all'avvenimento dei Dodici al Governo. E poichè ivi si ordina di preferirlo nel caso che il Comune di Siena si determini a far condurre l'acqua alla piazza, per essere stato Jacomo ritrovatore del modo, è chiaro che l'articolo è posteriore al detto ritrovamento ed anteriore all' anno 1339 in cui fu riassunto il lavoro, e verisimilmente dell'anno 1337 in sequela al di lui ricorso più volte citato (§. IV. V.). Ed infatti se si esaminano tutti i luoghi di quel Codice ove sono nominati i Dodici, ivi si vede

si legge il seguente memorabile articolo: *De Magistro Jacopo de Vannis Magistro lapidum. Si contingat Comune Senarum intendere ad faciendam conduci aquam in Campo fori Comunis prædicti requiratur Magister Jacopus* qui fuit repertor operis antedicti *cum salario & pactis inter dictum Comune & dictum Magistrum Jacopum hactenus ordinatis*; onore singolarissimo reso a questo Maestro dalla Repubblica Sanese e prova irrefragabile essere egli solo stato sempre tenuto per il ritrovatore dei condotti della Fonte di Piazza. Ed è certamente in omaggio al merito di ritrovatore dell'acqua se nella relazione che si fa al Consiglio delle preci del figlio Giovanni sotto il dì 26 Novembre 1349 (§. IV.) vien dato al di fresco defunto Jacomo il Soprannome *dell'acqua*, denominandosi il primo *filius olim Magistri Jacobi* dell'acqua; costume andato poi sempre innanzi (1) ed imitato nel secolo seguente quando Jacopo della Quercia a riflesso degli ornati della Fonte di Piazza fu detto Jacopo *della Fonte*.

§. VI. Per l'industria adunque e direzione principalmente di Jacomo, tuttochè in ultimo in società con altri due maestri, ebbe l'opera di condurre l'acqua alla piazza di Siena felice termine con grandissimo giubbilo dei Sanesi, che ne attendevano con impazienza il momento. Variano però non poco le Storie edite o inedite nell'indicare l'anno e il tempo di tal venuta; altri mettendola nel 1342 (2), altri nel 1343 (3), ed altri infine nel

1344

vede raschiata la pergamena per cancellare ciò che vi era scritto, cioè il nome dei Nove, e sostituirvi i Dodici.

(1) In maggior conferma ecco alcuni documenti ritrovati per le ricerche e diligenza del Sig. Giovacchino Faluschi Sacerdote Sanese, cui io ne aveva data special commissione. Nel libro de'Consigli della Campana segnato di num. CLXI. all'anno 1356 sotto il dì 26 Novembre fo. 30 si legge essere stato deliberato che per lo spazio di anni 10 si dassero ogni anno 12 fiorini d'oro a Domenico e Jacoma figli del q. Maestro Giovanni di Maestro Jacomo *dell'acqua* della fonte del Campo per essere pupilli e poveri, e per essere vissuto poco il detto Jacomo, al quale il Comune di Siena per recognizione di tanto benefizio avea destinato darsi 150 lire l'anno. Nel Tomo CLXXVIII. delle Deliberazioni dello stesso Consiglio all'anno 1366 sotto il dì 30 Ottobre fo. 42 si ordina che per elemosina e per memoria del q. Maestro Jacomo *dell'acqua* si diano ai pupilli Domenico e Jacoma del q. Maestro Giovanni del detto Maestro Jacomo fiorini 20 d'oro per anni cinque dei denari della Biccherna. E sotto le volte della Chiesa di S. Francesco nella stanza che era già dell'Uffizio dell'Abbondanza e serviva per magazzino dei grani esiste una lapida sepolcrale affissa al muro di contro al primo pilastro ove si legge questo epitaffio: *S. Maestro Giovanni del M.° Jacomo Eredum suorum Magistri de aqua.*

(2) Tommasi Historie di Siena P. II. pag. 293.

(3) La Cronica di Andrea Dei e Angelo di Tura. V. Muratori *Script. Rer. Italic.* Tom. XV. pag 105. Malavolti Hist. delle guerre e fatti dei Sanesi P. II. pag. 102.

1344 (1). Non avvi però dubbio alcuno che l' acqua non facesse la sua prima comparsa alla piazza il dì 5 Gennajo 1343 dappoichè se ne trova la memoria al principio del libro di Biccherna B. n. 184 già citato, di mano di quell' istesso Francesco di Mejo Figliani scrittore o sia computista di questa ragione negli appresso termini: *Sia memoria che venne l' acqua nel Campo Domenica* 5 *di Gennaro* 1342 (2); dov' è da avvertirsi che, secondo lo stile anticamente in uso in Siena, in questi libri egualmente che in tutti gli altri libri pubblici si facevano cominciare gli anni *ab incarnatione* e così dal dì 25 di Marzo, i quali da quell' epoca in poi coincidevano con l' era volgare *a nativitate* o sia dal dì 1 di Gennajo. Onde ciò che quì si dice del dì 5 Gennajo 1342 *ab incarnat.* deve intendersi del 1343 *a nativit.* Io però non credo che questa fosse la sua pubblica comparsa, altrimenti non avrebbe lo scrittore mancato di notare le feste che in tale occasione furon fatte, le quali come testimonio di vista furono diligentemente descritte sotto quell' anno dal compilatore di quel tempo della Cronica di Andrea Dei e Angelo di Tura. Mi sembra poi che per rilevare come la cosa fu dia lume l' altra Cronica MS. di Agnolo Tura del Grasso (3).

Vie-

(1) *August. Patricii Hist. Senen. Liber*, nel Vol. MS. che si conserva nella Libreria dell'Università al plut. XXVI. E. 26. Quivi si suppone la venuta dell'acqua il primo Luglio 1344: ma si osserva poi emendato d'altra mano il MS. e per quanto pare di mano del Benvoglienti con sostituirvi il mese di Giugno e l'anno 1343. Lo stesso anno 1344 e mese porta il MS. intitolato: *Pii III. Annal. Senens.* esistente nella Libreria dell' Università al plut. XXVI. E. 11 a fo. 122 t.° ; ma questi Annali attribuiti al Sommo Pontefice Pio III. non sono che una copia dell' Istoria di Agostino Patrizj sopra citata, con piccole e non essenziali variazioni.

(2) Con questa memoria combina il Tommasi (Hist. di Siena luogo citato) se non che sbaglia il mese dicendo: *Nel principio del mese, cioè a' 5 di Ferrajo in Domenica* 1342 . . . . . . *la fonte Gaja del Campo cominciò a ricevere acque in molta abbondanza, la quale Maestro Jacomo di Vanni d' Ugolino, havendo nel cavare del buttino molte difficoltà superate, finalmente vi condusse*. Ma oltre allo sbaglio del mese un'altro ne commette indicando le feste fatte dai Sanesi per tale avvenimento come se fossero state fatte subito allora e non nel Giugno seguente, di che non può dubitarsi. Il quale sbaglio si parte forse dalla maniera confusa con cui si esprimono alcuni antichi Cronichisti, e precisamente la Cronica anonima e la Cronica Aldobrandina, che più sotto si rammentano.

(3) Questa Cronica è citata da Uberto Benvoglienti nel suo sopraindicato MS. che si conserva nella Libreria dell' Università al plut. XXVI. A. 1. con trascrivere ivi tutto lo squarcio da me riferito nei §§. VI. e VII., ma non esiste in detta Libreria il Codice, di cui si è servito Benvoglienti, nè mi è noto ove si trovi. E' per altro così grave l'autorità del Benvoglienti per potersi intieramente riposare sopra di essa, tanto più che lo squarcio indicato concorda con altre Croniche di quel secolo.

Viene in essa notato sotto l'anno stesso: *Sanesi avendo fatti molti grandi buttini sotterra per trovare acqua & condurla nel Campo di Siena . . . . . & avendo già in questo tempo condotto l'acqua che poteva venire ordinaro e cominciaro a murare nel mese d'aprile una fontana sul Campo di Siena ma non molto grande*. Si legge pure in altra Cronica anonima del secolo XIV. (1) all'anno 1342 = *L'acqua che vienne nella fonte del Campo vene la prima volta a dì V. di Gennajo in Domenica* (nel che concorda colla memoria dei Libri dell'acqua) *e murì uno nel buttino e di detta acqua si fe gran festa*; e più sotto: *la fonte del Campo si cominciò a murare d'Aprile*. Le stesse cose precisamente sotto l'anno 1342 riferisce la Cronica di Domenico Aldobrandini continuata dal suo figlio e nipote (2). Dai quali racconti parmi che assai chiaramente apparisca che dopo essere stata condotta l'acqua alla piazza si pose mano a fabbricarvi una piccola fonte. E poichè fu cominciato a murare la fonte nell' Aprile, è chiaro che l'acqua vi era giunta alquanto prima e senza dubbio; a forma della memoria e della Cronica anonima, il 5 Gennajo dello stesso anno, ma per altro privatamente, e che furono fatte le feste per segnalare l'epoca dell'arrivo dell'acqua alla piazza quando, dopo essere terminata la nuova fonte, le fu dato l'acqua pubblicamente, cioè il primo Giugno dell'anno stesso giorno di Pentecoste.

§. VII. Qual fosse l'opera fino a questo tempo condotta a termine sotto la direzione di Jacomo di Vanni può argomentarsi da quello che sono i bottini dell'acqua che viene presentemente alla fonte di Piazza. *Sanesi* dice Agnolo Tura del Grasso nella citata Cronica MS., *avendo fatti molti grandi buttini sotterra per trovare acqua & condurla nel Campo di Siena i quali buttini furono cominciati già gran tempo* (cioè l'anno 1334) *& sono sotterra fuori della Città a quattro miglia in più rami de'quali ve n'è molti che non v'anno trovato acqua & molti ve ne sono che gittano acqua abbondante & tutti sono fuore della Città a Camullia per infino sul Campo & avendo già in questo tempo &c.* (Ved. sopra §. VI.). Or appunto gli attuali bottini si estendono circa a quattro miglia fuori della Città, si dividono in molti rami, alcuni dei quali conducono acqua ed altri nò; cosicchè non pare che siavi il minimo dubbio che non sian dessi i medesimi da prima ritrovati e costruiti da Jacomo di Vanni, quelli che diedero l'acqua alla piazza l'anno 1343.

§. VIII. Un'idea dell'estensione e diramazione di questi bottini si ha dalla pianta dei medesimi, che si annette (Tav. I.), tratta da quel-

(1) V. il Cod. che si conserva nella Libreria dell'Univ. al plut. XXVI. D. 6.
(2) V. il Cod. che si conserva in detta Libreria al plut. XXVI. D. 5.

da quella in grande fatta l'anno 1769 dal Sig. Florenzio Razzi pubblico Ingegnere, di Commissione del Magiſtrato e Provveditore di Biccherna, con la direzione di Belisario Bulgherini Provveditore delle ſtrade foranee, ponti, e fonti della Città, in esecuzione di Sovrano Motuproprio del dì 27 Aprile 1768, la quale si conserva nelle Stanze di residenza del Magiſtrato Civico della Comunità di Siena. Secondo l' indicata pianta la lunghezza del ramo maeſtro con tutti gl' influenti fa la somma di canne 6200 e braccia 2, che sono miglia ſtatutarie Sanesi num. 6 e braccia 3202 o prossimamente miglia sei e $\frac{3}{5}$, ovvero miglia moderne di Braccia Sanesi 2500 num. 9 e Braccia 2302, non considerati però i rami che conducono l' acqua dal canale maeſtro ai pozzi dei particolari, i quali se fossero tenuti a calcolo accrescerebbero non poco il totale dei bottini.

§. IX. Parrebbe che la copia di acqua condotta in quell' anno 1343 alla Piazza di Siena giungesse al colmo di abbondanza quando non si facesse attenzione che alla gioja che recò a tutti i ceti dei Cittadini ed alla pompa delle feſte celebrate. Egli è molto verisimile che i Presidi e Maeſtri di queſt' opera si dassero ogni premura di far comparire le acque più copiose che potevano, usando gli artifizj idonei a condurli al loro intento. Nè ciò era loro difficile avanti che l' acqua fosse data perennemente alla fonte potendo trattenerla e farla alzare nelle conserve e nei bottini a loro piacimento. Io non so se fino da quel tempo fossero coſtruiti dei serbatoj deſtinati a queſto o altro simile uso. So che nel secolo decimoseſto tali recipienti esiſtevano nel ramo di Marciano, poichè in una informazione anonima su queſti bottini, che rende minuto conto dello ſtato in cui allora si trovavano, esiſtente nella pubblica Libreria dell' Università nel Volume di manoscritti miscellanei segnato XXXI. A. 18, la quale sembra essere una minuta autografa, e certamente di carattere di quel secolo, scritta non molto dopo la caduta della Repubblica, ma alquanto dopo il 1558, essendovi citato il tempo del Camarlingato di Biccherna di Tommaso Buoninsegni, che fu in detto anno, si legge: *Sonovi ancora* (nel ramo di Marciano) *le galazze grandi dove si suole raccorre l' acqua per dare la carica a detto buttino per S. Maria d' Agosto o altri giorni celebri & mostrare la Città più abbondante d' acqua*. La verità è che queſti bottini fino dal loro principio non corrisposero appieno al desiderio dei Sanesi di vedere la Città loro e specialmente la fonte situata nella gran Piazza, ricca di acque onde provvedere tutte le altre fonti senza risparmio e supplire a tutti gli usi come si faceva con quella di Fontebranda; della qual cosa c' iſtruisce baſtantemente l' introduzione ad una rappresentanza fatta al Consiglio della Campana l' anno 1347 il dì 13 Aprile in queſti termini: *Cum opus aquæ conducendæ in Campum fori Comunis Senarum ferventer non procedat,*

cedat, ut spes Senensium respicit (1). E questa fin d'allora fu la ragione che si pensò a condurre a Siena, come da detto atto si vede, oltre alle acque del Castagno, di Uopini, e del poggio di Vico, le quali allora non erano state per anche derivate nel condotto maestro di Fontebecci, ancora le acque della Staggia, della fonte di Quietole e di Mocenna, delle quali opere, *quæ*, come si esprime il documento, *parant de proximo pulchritudinem & utilitatem tam affectuosius expectatam*, era già stata fatta l'allogagione; e che si dimandò al Consiglio di assicurare meglio e accrescere il fondo destinato a questa impresa, il quale, secondando pienamente la proposizione fattali, in vece delle entrate della Città di Grosseto, che erano assegnate per il lavoro dei bottini e delle fonti, gravò il provento della gabella delle carni a pagare all' Uffiziale ed Operajo pro tempore sopra quest' Opera dugento fiorini d' oro il mese finchè il progettato lavoro fosse condotto a perfezione.

§. X. Non saprei assicurare che a questi nuovi condotti appartenesse il lavoro fatto in quest'anno per condurre altr'acqua essendone Operajo Maestro Jacomo di Vanni come si vede al Libro di Biccherna B num. 213 fo. 28. Posso però asserire con franchezza che il lavoro fu incominciato e condotto molto innanzi, ma che poi fu interrotto o sospeso; lo che obbligò la Repubblica a dare nuovi provvedimenti l' anno 1360. Si legge fra le deliberazioni del Consiglio della Campana il decreto del dì 8 Febbrajo 1347 o s'a 1348 con cui viene ordinato invigilarsi che non siano cagionati danni e impedimenti al lavorìo dei condotti delle acque da condursi alla fonte di Piazza, Fontebranda, e altre, incaricandone il Potestà o suo ministro (*miles*) *in partibus Querciegrosse deputatus ad requisitionem operarii super ipso laborerio deputati*; nelle quali parti di Querciagrossa non poteva essere altro lavoro che quello per condurre l'acqua della Staggia e di Quietole. All' anno poi citato sotto il dì 2 Dicembre (2) apparisce la proposizione dei provvedimenti da prendersi per riassumere il lavoro, approvata con decreto del Consiglio, da cui si rileva che gli acquidotti destinati a condur l' acqua della Staggia erano già in gran parte fatti, ma che restava a farne una certa parte per unire quelli già fatti tra loro e col bottino maestro, compiuti i quali l'acqua della Staggia sarebbe venuta con certezza alla fonte di Piazza: *qua aqua*, vien soggiunto, *maximum dicto Comuni Senarum & singularibus hominibus commodum resultabit alias* bottini *jam facti & expensa in eis facta perdita sunt*; per la qual cosa fu de-

(1) Ved. Delib. del Cons. della Camp. T CXLI. fo. 27.
(2) T. CLXIX. delle Delib. del Cons. della Camp. fo. 32.

fu decretato crearsi un' Operajo, cui si dà l' incarico e l'autorità necessaria per dar compimento a tal lavoro, *adeo quod dicta* Staggia *in dictum fontem Campi*, *qui dicitur* Fonte Gaja, *protinus dilabatur*; assegnando sulla gabella delle carni, non più una somma limitata a dugento fiorini d' oro il mese, ma quella qualunque somma che fosse per essere necessaria. E quì giova osservare come fossero unanimi tutti i partiti sopra l'articolo di provvedere ed arricchire di acque la Città. Poichè da quest'atto risoluto sotto il governo dei Dodici si vede continuare nei Sanesi il medesimo impegno intorno a ciò che vi era stato per lo innanzi, cioè specialmente dal 1334 al 1349 (§. IV.) sotto i Nove stati scacciati dal governo dai Dodicini fino dall' anno 1355 alla venuta in Siena dell' Imperatore Carlo IV.

§. XI. Che poi i condotti dell'acqua della Staggia e di Quietole nel 1362 fossero in parte già fatti, ma in parte mancassero tuttora, si raccoglie da un atto del medesimo Consiglio del dì 8 Agosto di detto anno (1). Era stata fatta l' allogagione di una porzione dell' acquidotto, cioè dal luogo del Pollajo fino alla strada di Querciagrossa, per condurre alla fonte Gaja l'acqua della Staggia, di Quietole, e della Lama a Michele di Ser Memmo, ceduta poi da questo a Ser Nino Dei Medico, il quale avendo compito il suo impegno, secondo che egli espone, con molta sua perdita, e non avendo il Comune di Siena corrisposto con far condurre l' acqua da Quietole al luogo del Pollajo e dalla strada di Querciagrossa fino al bottino maestro, soggiungendo: *adeo quod dicta aqua venire posset in dictum fontem Campi*; *imo clarificari non potest in animis Senensium dictum laborerium factum fore ad plenum per dictum Ser Ninum*, *& sic per dictum Ser Ninum non stetit*, *nec stat*, *vel staret quatenus dicta aqua conducatur in dictum fontem*, *sed duntaxat per dictum Comune Senarum in non faciendo fieri conductum & bottinos a dicta Staggia usque ad dictum locum* del Pollajo, *& a dicta strata de Quercia grossa usque ad dictum bottinum magistrum fontis prædicti*; dimanda di concerto con il predetto Michele di Ser Memmo di essere assoluto da qualunque obbligo ulteriore e dalla restituzione di 500 fiorini d' oro ricevuti; la qual dimanda gli fu accordata con decreto del Consiglio e con le condizioni in detto atto espresse. Potrebbe alcuno facilmente credere che questa allogagione o cottimo fosse recente, cioè fatta dipendentemente dal decreto del 2 Dicembre 1360 già citato (§. X.). Ma che questa parte dell' impresa fosse data a Michele di Ser Memmo e da questo ceduta a Ser Ni-

(1) Nel Tom. CLXXII. delle Delib. del Cons. della Camp. a fo. 36. e segu.

no Dei Medico molto prima e forse poco dopo e dipendentemente dal decreto sopra riferito (§. IX.) del dì 13 Aprile 1347, risulta da questo, che Ser Nino si chiama grandemente danneggiato in questo lavoro specialmente in occasione della venuta dell' Imperatore ed inoltre attesa la guerra dei Perugini ed anche per causa di varie compagnie di facinorosi entrate in Toscana. Or la venuta dell' Imperatore in Siena fu l'anno 1355 e nel 1358 fu la guerra con i Perugini, e perciò l' epoca di tal contratto dovea essere anteriore.

§. XII. I documenti che mi è riuscito raccogliere e dai quali anche per altrui mezzo ho fatte diligenti ricerche non offrono altre notizie concernenti il proseguimento del lavoro e la sua riduzione al termine desiderato (1). Gli archivj non hanno conservato che i libri delle Deliberazioni del Consiglio Generale e del Concistoro, dai quali si possano avere notizie precise e sicure intorno alle grandi imprese della Repubblica. Ma in questi non compariscono che quelle supreme determinazioni, che autorizzavano i Magistrati subalterni, ed in questo caso il Magistrato di Biccherna, o le ordinate deputazioni ad eseguire. I dettagli poi dovevano apparire nei libri di Biccherna e nei libri delle particolari deputazioni; l' opera degli acquidotti della Staggia essendo affidata ad un Uffiziale o Operajo destinato a presiedervi e provenendo il fondo assegnato per tal lavorìo non dalla Cassa di Biccherna, di cui soltanto esistono i libri, ma dall'uffizio della gabella delle carni, doveva adunque avere i suoi libri particolari sul piede di quelli che esistono dal 1340 al 1343, i quali essendo perduti si è necessariamente all' oscuro su questo interessante articolo. Due cose nondimeno mi portano a concludere che l' opera fosse continuata e che l' acqua per questi nuovi canali fosse condotta al bottino maestro: l' esistenza dei medesimi acquidotti, e le tracce impresse in essi dall' acqua che vi ha corso.

§. XIII. Eravi in Siena la tradizione che le acque dei bottini della fonte Gaja venissero anticamente dalla Fonte-stella, perdute le quali la

(1) Nel libro delle revisioni di ragioni di Camarlinghi del Magistrato di Biccherna segnato di num. 11 dall' anno 1367 all' anno 1377, si legge quanto appresso = 1376. *Escita del Camarlingo. Omissis &c. Anco troviamo che ha ricevuto di ferro, che vendè, che ritrasse dal buttino di Quercia grossa* 42 L. 12 S. e 8 *den.* Si può dunque inferirne che in tal'anno era terminata la lavorazione di quel condotto, impropriamente quì denominato bottino, perchè altrimenti non si sarebbero venduti i ferri che alla medesima servivano, e dei quali ancora si parla nel concordato del 1362 con Ser Nino Dei Medico; sebbene le suddette espressioni non abbiano valore sufficiente per accertarcene.

la Città ne patisse penuria. Su questa tradizione era appoggiata l'asserzione di Girolamo Gigli in più luoghi del suo Diario, che queste acque procedessero dalle pendici di Fonterutoli (1). Nell' anno 1712 scarseggiava singolarmente l' acqua alle pubbliche fonti a cagione dei grandi asciuttori preceduti. Quindi fu proposto nel Collegio di Balìa (2) il modo che poteva tenersi per riparare efficacemente al danno prodotto da tal mancanza, *pigliando altro ramo di acqua dal luogo detto la Fonte a Stella, d' onde soleva aversi quando la Città era in stato di Repubblica*; e furono eletti due dello stesso Collegio perchè trattassero di tal bisogno col Magistrato di Biccherna e con chiunque fosse necessario e considerassero tuttociò che ridondar poteva in pubblico servizio, cioè Galgano Bichi e Giuseppe Cosatti, ai quali nel 10 Febbrajo 1712-1713 fu aggiunto per terzo Leonido Landucci. Non si trovano però tra i libri e filze che dal soppresso Magistrato di Biccherna passarono nell' Archivio dell'attual Magistrato Civico della Comunità di Siena i documenti di tal' affare, forse perchè furono ritenuti dai Deputati nei domestici archivj come era frequente in Siena. Ma trovandosi in mano dell' attual bottiniere Gani una pianta dell' antico acquidotto (Tav.II.) che dalla Stella e da Quietole, secondo la comune credenza, conduceva l' acqua alla fonte di Piazza, in piè della quale si legge la relazione senza firma ma scritta di mano del Bottiniere di quel tempo Giuseppe Fondi, diretta ai sovra mentovati Deputati ed al Camarlingo di Biccherna Niccolò Sozzini, che porta la data del dì 15 Dicembre 1702, si può di quì ricavare e l'operato della Deputazione e le notizie sopra gli antichi condotti provenienti dalla Staggia in tale occasione scoperti.

§. XIV. Rende pertanto conto il Fondi come eragli sortito di ritrovare l' acquidotto mentovato *da S. Stefano sopra Macialla fino a Quietole*, e che *avendolo di tanto in tanto scoperto e fattone saggio* ha *riconosciuto che parte di esso è fatto di docce di terra cotta con suoi muri laterali e coperto di lastroni di sasso e questo da Quietole fino al Podere delle Rede per lo spazio di canne* 1068 *in faccia al qual podere presso Levante le docce imboccano in condotti tondi parimente di terra cotta lunghi più di braccio e di diametro nel loro vuoto un sesto di braccio che sono murati in mezzo ad un fortissimo muro di lavoro quadro e seguono così fino a S. Stefano per canne* 1247 *e può credersi*, continua egli, *che siano tali* fino alla loro imboccatura nel bot-

(1) Diario Sanese P. I. pag 265 e 360.
(2) V. le Delib. del detto Collegio di detto anno esistenti nell' Archivio del Magistrato Civico della Comunità di Siena.

bottino sotterraneo, *quale imboccatura dovrebbe essere*, *a* di lui *credere*, *tra l'Olmo e la Ripa*. Una gran parte di questi condotti esistono ancora ed io stesso ho potuto riscontrare il loro andamento ed osservare e fare scavare delle docce aperte di figura quadrilatera vicino al podere di Quietole, lungo la strada che scende al mulino di Cavasonno, e verso Pietr'alta e Petrojo, e dei condotti tondi nel podere delle Rede ed in quello dell' Olmicino. L'andamento e lunghezza di questo condotto da Quietole fino a S. Stefano ed i luoghi, per i quali passava con le sorgenti dalle quali riceveva le acque appariscono dall'annessa Pianta (Tav. II.) fatta sulle traccie di altra del 1712 del bottiniere Fondi, la quale egli rimesse ai Deputati per corredo della sua citata relazione. Questa pianta per altro è semplicemente dimostrativa, ed è molto lungi dal poter dare esatta idea delle relative distanze e misure. La descrizione delle misure fu dal Fondi annessa alla Pianta separatamente in canne di braccia quattro Sanesi, e sono le appresso:

Dal Colombajo a S. Stefano o sia dal termine attuale del bottino maestro fino al termine dell' antico condotto della Staggia a S. Stefano	canne num.	984 —
Da S. Stefano a Querciagrossa - - - - - - - -	,,	721 —
Da Querciagrossa al podere delle Rede - - -	,,	472 —
Dalle Rede a Quietole - - - - - - - - - - - -	,,	1068 —
Da Quietole alla Stella - - - - - - - - - -	,,	780 —
Dalla Stella a Vignale - - - - - - - - - -	,,	456 —
Da Vignale al Romito - - - - - - - - - -	,,	685 —
Dal Romito a Quietole - - - - - - - - - -	,,	290 —
Da Frassi al Romito - - - - - - - - - - - -	,,	700 —
Che in tutto sono canne - - - - -	num.	6156 —

§. XV. Dopo avere il Fondi descritto il condotto di Quietole e della Stella, che chiama superiore, passa a dire di altri acquidotti, dei quali pure avea trovate le reliquie, i quali passando sotto Quietole venivano tutti ad imboccare nel canale tondo in faccia al podere delle Rede. Ma questi non sono indicati nella Pianta. Egli pare di sentimento, che il condotto inferiore servisse per le acque di Vignale, Vignalino, e Frassi, non sembrandogli che queste potessero farsi salire nel condotto superiore di Quietole; talchè secondo esso, ed anche secondo che sembrano dimostrare le reliquie attuali, l' acquidotto delle sorgenti della Staggia era diviso in due principali rami che influivano nel canale tondo.

§. XVI. L'esistenza di questi canali non lascia dubitare dell' incanalamento a Siena dell'acqua di Quietole e forse di quella del fiume.

fiume. Ma le rovine di grossi muri sotto il Romito, nell' interno dei quali veggonsi scolpiti dei canali costruiti con grande artifizio all' effetto di farli resistere a qualunque esterna o interna forza, fanno chiaramente conoscere che pel loro mezzo conducevansi al di quà della Staggia le acque delle sorgenti, che scaturiscono nell' altra pendice di contro a Quietole. E poichè le acque di Vignale, Vignalino, e Romito insieme riunite non avrebbero potuto salire al condotto della sorgente di Quietole senza grandemente forzarle, egli è verisimile, che l' indicata costruzione avesse questo oggetto, o più probabilmente avesse l'altro di far tragittare la Staggia alle dette acque o sotto o sopra e quindi alla falda del poggio lungo la destra riva del fiume condurle per un condotto inferiore finchè si potessero riunire all'acqua di Quietole nel condotto superiore. Ed in maggior conferma che le indicate acque non meno che quelle della Stella fossero nei descritti acquidotti incanalate, non tacerò essermi state fatte osservare alcune docce di terra cotta trovate nel podere di Vignalino al di là della Staggia, e che i contadini stessi, che asserirono averle trovate, aggiunsero di essersi imbattuti presso la sorgente di Vignalino in un condotto murato, stato indi distrutto nel coltivare, che essi non dubitavano esser quello stesso costruito per tradurre quell'acqua al comune acquidotto. E' poi certo che nell'atto di fare in quest' anno medesimo delle nuove coltivazioni presso la fonte Stella nel podere adjacente furono a caso trovati certi condotti rotondi di terra cotta, i quali dovevano anticamente servire a condurre l' acqua di quella sorgente ed in parte sono stati subito restituiti a tal' uso per comodo del podere. Io non ardirei pronunziare alcun certo giudizio intorno all' antico uso dei mentovati condotti; dirò anzi sembrarmi alquanto inverisimile che i Sanesi traessero le loro acque da stato estero ed emulo, poichè le terre al di là della Staggia erano fin da quel tempo in potere dei Fiorentini. Pure non è del tutto improbabile che la Città ne avesse fatto l' acquisto dai particolari che ne erano in possesso, affine di averle più pure e purgate di quello che sarebbe stato se avessero prese le acque dal fiume.

§. XVII. Non lascia poi il Fondi di esporre le sue congetture intorno alla continuazione dei condotti di queste acque da S. Stefano, ove terminano le traccie da lui ritrovate, fino al bottino che incomincia dal Colombajo. Si è già riferito (§. XIV.) uno squarcio della sua relazione, ove pone l' imboccatura del canale tondo nel bottino sotterraneo *tra l' Olmo e la Ripa*. E lo stesso meglio apparisce dove nella stessa relazione per ricondurre alla Città le acque di Quietole e della Staggia propone *di finir di vuotare il bottino del Colombajo presso l' Olmo ad effetto di ritrovare se fosse possibile*

la

la desiderata imboccatura in esso del canal tondo, e nel medesimo tempo cercare di scuoprire questo di S. Stefano alla volta dell'Olmo, che non era stato ritrovato. Altra opinione adottò l'Ingegnere Matteucci in una sua Memoria MS. sopra le fonti e gli acquidotti della Città di Siena, segnata del dì 12 Febbrajo 1792, che originale si trova appresso S. E. il Sig. Luogo-Tenente Generale e Governatore Vincenzo Martini, ed in copia nell'Archivio Comunitativo, ove dà un'idea ed uno schizzo dimostrativo della situazione del cammino e della direzione che avevano gli antichi canali delle sorgenti del fiume Staggia. Ivi adunque dice: *Non ho trovato alcuna memoria o pianta, che indichi la protrazione di questo bottino oltre il Colombajo, alla riserva di una relazione del Bottiniere Giuseppe Fondi del* 1719, *nella quale espone che* „ dall'occhio del „ Colombajo per braccia 160 vi è il termine del bottino con terre- „ no rovinato e scosceso, di dove si vede sorgere un poca d'acqua „; *Ma dall'alligato schizzo di profilo livellato* (V. Tav. III.) *e misurato in compendio sulle tracce e direzione degli antichi canali sembra di poter credere, che questo ramo di bottino del Colombajo possa inoltrarsi fino alle vicinanze della Chiesa di S. Stefano, giacchè diversamente l'acqua delle sorgenti sopra indicate non sarebbe potuta giungere alla sommità dell'osteria della Ripa senza averla incominciata a forzare fino dalla sua scaturigine*; lo che non era, perchè fino a tutto il podere di Pietr'alta trovansi le docce aperte, e perciò i condotti tondi che si trovano nei luoghi intermedj erano soltanto destinati a superare le alture di Querciagrossa, Argiano, e Macialla per *passarsene dipoi liberamente nei bottini sotterranei*.

§. XVIII. Alcuni fatti pare che provino la protrazione del bottino del Colombajo verso il podere dell'Olmo. Essendosi applicato il Fondi ad osservare il termine di questo bottino conobbe che non poteva *avere il suo fine all'occhio antico vicino al Colombajo*, onde prese a farlo vuotare, e riferisce che fino al dì, in cui presentò la citata sua Relazione, ne era stato *vuotato sopra a 46 canne, delle quali num. 36 nel bottino maestro sotto e sopra nel modo medesimo che sta il rimanente fino a Siena*; nel residuo poi trovò *murato il solo gorello ove corre l'acqua*. E siccome non si trovava il termine, ma dalla terra *portata e stesa dall'acqua per la lunghezza del bottino* argomentava la sua continuazione; così stabilì riconoscersi da ciò che il bottino seguitava *alla volta dell'Olmo per andare come può credersi a trovare l'imboccatura del suddetto condotto tondo*. La produzione di questo bottino verso l'Olmo e la Ripa pare che si confermi dalle osservazioni riferite dall'Autore dell'Informazione anonima esistente nella pubblica Libreria dell'Università già sopra citata (§. IX.). *Tornando*, egli dice, *a detto sboccatojo*, cioè allo sboccatojo

catojo del Castagno, *& caminando verso la Ripa si caminò altri 600 passi trovandolo sano & assai netto. Terminasi in una ruvinata la quale lo serra in tutto, ma sotto ci viene l' acqua per chioca murata di mattoni*. L' autore medesimo non metteva in dubbio che il principio di questo bottino non fosse verso la Ripa e forse verso Querciagrossa, poichè incomincia la sua informazione col dire: *L'acquidotto o buttino che dà l'acqua alla fonte di piazza, ec. . . . . . va a pigliare l'acqua per la strada della Castellina fino al luogo detto la Ripa e forse presso al luogo detto Quercia grossa*. Così se non è dimostrata la protrazione del bottino sotterraneo verso S. Stefano, essa non è priva di appoggio, o almeno non è mai stato dimostrato il contrario, perchè nelle diverse visite e tentativi non si è mai trovato il termine del bottino indicato dal terreno vergine, ma sempre si è lasciato con manifesti indizj di continuazione verso l' Olmo, ove il Fondi con maggior probabilità poneva l' imboccatura del canal tondo nel bottino sotterraneo. Nè io sarei facile ad ammettere senza altra prova il prolungamento del bottino fin verso S. Stefano supposto dal Matteucci (§. XVII.), quando dall' ispezione locale si vede che i nostri Antichi potevano condurre le acque superficialmente per linea inclinata lungo la pendice occidentale del poggio, come fatto avevano fino a S. Stefano, ed in tal guisa risparmiare tempo e spesa. Ed infatti pare che lo stesso Matteucci cangiasse poi di opinione poichè nella sua Relazione segnata del dì 8 Agosto 1794, e da esso presentata al Magistrato Comunitativo della Città in esecuzione delle incumbenze stateli dal medesimo affidate, e meglio ancora nel Giornale delle sue operazioni sotto il di 1 Luglio dell'anno stesso ivi citato, stabilisce il termine dei condotti superficiali murati presso il podere del Poggiarello, ed asserisce esservi tutto il fondamento di credere che l'abbandonato e ripieno bottino sotterraneo avesse quivi principio.

§. XIX. L'esistenza dei condotti non è però da per se sola sufficiente a provare in una maniera fuori di ogni controversia che l'acqua delle sorgenti della Staggia sia stata effettivamente condotta nel bottino maestro ed alla Città. Potrebbe infatti l' impresa degli acquidotti essere stata condotta molto innanzi e non essere poi stata perfezionata, ovvero per altre ragioni l'acqua non essere mai venuta alla Città. Per togliere questo dubbio ho pensato che se l' acqua avea corso in questi canali, essendo di natura tartarizzante, come me lo aveva provato l'analisi delle sorgenti della Staggia, avrebbe dovuto lasciare in essi sicure tracce del suo passaggio. Io feci adunque scavare in diversi luoghi i canali per esaminarli ed assicurarmi se vi esistessero grume, quali sogliono depositarsi da tal sorta di acque, e riconoscerne le parti componenti.

Ho pertanto osservato che tutte indistintamente le docce quadre aperte mantengono ai loro lati un forte e grosso incrostamento di tartaro, che non può essere che la deposizione di acque che vi abbiano corso. Egli è vero che il fondo del canale non è punto incrostato; ma quì conviene far conto della costante osservazione fatta nel gorello dei bottini attuali da quelli che gli hanno in cura, cioè che l'acqua che vi corre depone sempre delle grume dure e solide, e tenacemente attaccate ai lati del condotto e non mai al fondo, dove le croste che vi cadono rimangono sciolte e friabili, e non vi si attaccano a motivo del sedimento melmoso che vi trovano, e che torna a depositarsi sopra di esse, il quale ne impedisce l' adesione. La qual cosa dovendo pur succedere negli antichi canali, il tartaro non poteva attaccarvisi nè mantenervisi contro l' ingiurie dei secoli. Nei condotti tondi non si trova quella copia di tartaro che apparisce ai lati del canale aperto; ma specialmente alquanto lungi dal suo principio, e così piuttosto nel condotto scavato nel podere dell' Olmicino che in quello del podere delle Rede, conserva nella sua parte superiore una tenue ed uguale crosta di tartaro, mentre per la medesima ragione addotta parlando del canale aperto appena se ne vede traccia nella sua parte inferiore.

§. XX. Una prova novella che i descritti tartarosi incrostamenti sono il prodotto delle acque delle sorgenti della Staggia correnti in questi canali, io l' ho desunta eziandio dalla loro natura e componenti. Poichè avendo staccate più porzioni da diversi canali aperti e tondi, e dopo averle bene lavate e purgate avendole fatte sciogliere or nell' acido acetoso or nell'acido muriatico purissimo, ho osservato che, a riserva di un resto d' impurità, vi si sono disciolte egualmente in totalità, e che la soluzione non conteneva se non carbonato di calce misto con pochissimi atomi di magnesia, e che in ciò convenivano perfettameute con la natura e composizione delle terre effervescenti, che erano state estratte dalle diverse acque delle sorgenti della Staggia.

§. XXI. Provato che l'acqua ha corso per questi canali di Quietole e che per necessaria conseguenza era stata condotta alla Città, dee recare non poca maraviglia come abbia poi cessato di venirvi senza che i Sanesi abbiano mai più pensato per tanto tempo e specialmente nei principj a ristabilirne il corso. Se prestiamo orecchio alla tradizione ed alla comune credenza furono i nemici della Repubblica che in occorrenza di assedj rompendo gli acquidotti deviarono le acque ed alienarono la Città dal pensiero di ristabilirli, giudicando meglio avere minor copia di acqua che esser nel caso di vedersene mancanti del tutto in tali occasio-

ni

ni (1). La rottura degli acquidotti è in modo particolare rammentata negli assedj del 1526 e del 1555, e che cadesse negli acquidotti di Fonterutoli o sia delle acque della Staggia sembra in qualche modo convalidarlo con varie equivoche espressioni il Gigli nel suo Diario (2). Ma avendo preso ad esaminare i fondamenti di questa opinione mi è avvenuto di persuadermi che negli accennati assedj fossero stati bensì rotti gli acquidotti, ma che ciò accadesse presso la Città, non già negli acquidotti che conducevano l' acqua dalla Staggia a S. Stefano e di lì nel bottino maestro, i quali in quel tempo aveano forse cessato già di condurla per altre cause.

§. XXII. E che nel 1526 fossero rotti vicino alla Città parmi di poterlo concludere dal racconto di Sigismondo Tizio scrittore Sanese contemporaneo, che nel tempo di quell'assedio dimorava in Città. Egli espone il fatto così (3): *Hostes interea aquam commeantem in urbem ex* Bottinis, *ut vocant, abstulere, aliò devolventes: Putabant enim se nobis jacturam intulisse gravissimam, cum nihil nocuerint; non quidem ignorare debuerant aquam ablatam solum ad fontem, qui in foro est, & alios quosdam, decoris gratia, conrivare, nec ex fontibus universis auferri posse; meminisse insuper debuerant cives extorres quot cisternis Senensis Civitas abundet, quot puteis scaturiat.* Ed in primo luogo osservo che l' acqua fu deviata dai bottini. I bottini sono propriamente quelle sotterranee gallerie fatte per raccogliere le acque dall' interno delle adjacenti colline (§. I.); laddove i condotti delle acque della Staggia erano superficiali e perciò diversi dai bottini. Egli è vero che quel nulla aver nociuto con tal rottura di acquidotti potrebbe far credere che gli assedianti non avessero levata tutta l'acqua alla Città, come sarebbe accaduto se avessero rotti soltanto gli acquidotti della Staggia, mentre i bottini avrebbero continuato a somministrare alle fonti acqua sufficiente. Ma se così fosse, non avrebbe certamente mancato il Tizio di avvertirlo e riscaldato, come era, di trarne maggior motivo di derisione. Egli all' opposto confessa essere stata levata l'àcqua alla fonte di Piazza e ad altre che ne dipendono, e solamente avverte che la Città era provveduta di altre acque, di cui non poteva esser privata, ed assai abbondanti per supplire ai bisogni di un' assedio. Ma se l' acqua per opera degli assedianti fu intieramente levata alla fonte di Piazza è gioco forza confes-

Z ij sare

(1) Ved. la Relazione precedente ai §§. VII. e CXXIII.

(2) P. I. pag. 525.

(3) *Sigismundi Tizii Historiar. Senens. ad ann.* 1526 T. X. pag. 291. V. il MS. esistente nella Libreria di questa Università.

sare che fu essa deviata dal tronco comune vicino alla Città. Nè altrimenti dovette andare la cosa nell' assedio del 1555, per cui rimase estinta la Sanese Repubblica. Scipione Bargagli autore contemporaneo ed a cui in ciò che concerne le calamità sofferte in Siena per l'assedio pare che dar si debba tutta la fede d'istorico, nell' introduzione ai suoi trattenimenti ristampata recentissimamente in Livorno sotto la data di Londra 1798 nel Tomo II. delle *Novelle di Aùtori Senesi*, fa una non so dire se più tenera e patetica o più ingegnosa ed elegante descrizione dei disagj che patì la Città in quelle angustie, e tra le altre cose e aneddoti ch'egli riporta, *non posso io trattenermi*, soggiunge (pag. 123), *dal non accennare un benchè leggierissimo caso a persona avvenuto, che sopra un suo asino portava acqua a vendere, della quale ancora si pativa disagio, per quella già statane impedita e tolta, che fuori delle mura per lunghi condotti perviene a più fontane pubbliche della Città. Mentre costui dunque votava le barlette dell' acqua in casa, cui venduta le aveva, sopravvennevi per caso una frotta di Lanzi soldati, li quali veduto l' asino tutto solo, a guisa d' orsi affamati, tratti fuore lor coltellacci, lo sbranarono spacciatamente, partendosi lieto ciascuno col suo brano o brandello in mano & in spalla*. Or se tanta era la penuria dell' acqua che si portava a vendere in giro sù gli asini, convien pur confessare che la fonte di Piazza e le altre, che hanno l' acqua dagli stessi condotti suoi, erano totalmente asciutte; e poichè l' acqua non mancò mai alla Città, perchè nè il Malavolti nella sua Storia nè il Maresciallo di Monluc ne' suoi Commentarj, il quale racconta minutamente i patimenti sofferti dalla Città in quella congiuntura, non ne fanno menzione, è chiaro che prendevasi dai diversi pozzi e cisterne e da quelle fonti, come Fontebranda, Follonica, Fonte nuova ec., i cui bottini o per la poca estensione o per la profondità non potevano dai nemici danneggiarsi, per portarla a vendere in quelle parti, che non avevano altr'acqua che quella dei bottini di Fonte Gaja. E se le mentovate fonti erano del tutto asciutte, egli è pur fuori di dubbio che non dai condotti delle sorgenti della Staggia, ma dagli stessi bottini presso la Città o in una parola dal tronco comune era stata l'acqua levata e deviata. Ed io credo che per cagione principalmente dei danni cagionati al ramo maestro fra la Città ed il principio del ramo di Marciano fosse restaurato questo pezzo di bottino poco dopo la guerra e che a tal restauramento si referiscano le appresso parole della citata informazione anonima: *Questo acquidotto si trova al presente assai bene in ordine da la Città fino allo spiraglio del Malevolta, perchè fu restaurato quasi subito doppo la guerra nel tempo che Tomaso Buoninsegni fu K.° di Biccherna*. Si trova poi che Tommaso Buoninsegni fu Camarlingo di Biccherna l' anno 1558.

§. XXIII. Questa informazione scritta, come altra volta ho accennato (§. IX.) nel secolo XVI. e forse non molto dopo al 1558 non rammentando punto i condotti delle acque della Staggia e parlando in modo dubitativo dell' origine del bottino maestro, che s'innoltra per la strada della Castellina, mi fa credere che non recente in quel tempo fosse il guastamento di quei condotti, talchè fin d'allora perduta se ne fosse la memoria. Imperocchè se l' autore di essa ne avesse avuto certa notizia, incaricato com' era di esaminare lo stato degli acquidotti fuori della Città, avrebb' egli tralasciato di render conto di questi della Staggia? Avrebbe egli detto dubbiosamente che *l' acquidotto o buttino che dà l' acqua alla fonte di Piazza*, ec..... *va a pigliare l' acqua per la strada della Castellina fino al luogo detto la Ripa, e forse presso al luogo detto Querciagrossa*? E poichè i bottini sono descritti in pessimo stato e bisognosi di grandiose spese per ristorarli e che la Città penuriava d' acqua a segno che *buona parte* delle sue fonti erano *asciutte e con poca acqua*, avrebb' egli proposto la restaurazione di tanti rami di bottini e taciuto il modo più facile di provvedere la Città con ristabilire i condotti delle acque della Staggia? E tanto è certo che queste acque cominciarono a mancare da tempo molto più antico, che in una Deliberazione del Consiglio della Campana del 4 Febbrajo 1462-1463 (1) si adduce per motivo della nuova forma di eleggersi l' Operajo dei bottini e degli speciali doveri ivi ad esso ingiunti l' essersi *avuta piena informazione quanto sia diminuita l' acqua delle fonti . . . . & maxime quelli del Campo, perchè si dice volgarmente l'acqua del Castagno esser perduta, che oltre al danno risulterebbe infamia per esser perpetua alla . . . . Repubblica*. E tra gli obblighi dell' Operajo da eleggersi per il triennio successivo si comprende principalmente che *non possi nè debbi in quello tempo di tre anni lavorare se non da Fontebecci al Castagno per fino dove principia il buttino dal Castagno sotto pena di fiorini* 100 *& a questo modo*, soggiunge, *si mettarà l'acqua da Castagno, che so più di anni* 16 *che non venne a Siena, e così si faccia di tre anni in tre anni, che verrà a dire si farà buono e perpetuo lavorìo*, ec. Dalle quali ragioni e denominazioni apparisce, che non potendo venire a Siena l' acqua del Castagno per essere diruto ed impedito quel tronco di bottino maestro da Fontebecci fin dove principia il bottino del Castagno, non poteva venir neppure quella della Staggia. E poichè si parla dell' acqua del Castagno, che da 16 anni era perduta, e si reca a perpetua infamia della Repubblica il trascurarla, e niuna menzione in-

(1) V. il Vol. CCXXXIV. esistente nell'Archivio delle Riformagioni a fo. 290 e segu.

intanto si fa dell' acqua della Staggia; non è questa una ragione validissima per inferirne che quest' acqua mancava alla Città da tempo molto più lungo, a segno di esserne cancellata la memoria, o di considerarsi la riassunzione dei lavori per ricondurla come impossibile o come superiore alla condizione dei tempi od alle forze della Repubblica?

§. XXIV. Quando poi e come cessassero dal loro uffizio i condotti dell' acqua della Staggia non è facile il determinarlo, mancandone ogni traccia. Sembra nondimeno probabile che l' acqua non continuasse per lungo tempo a scorrere per quel condotto, perchè tanto persuade la tenue crosta che s' incontra specialmente nel condotto tondo. Io so che l' acqua provveduta di gas acido carbonico, in cui pel di lui mezzo sta in dissoluzione il carbonato calcario o magnesiaco, si scompone più lentamente e difficilmente nei canali chiusi per essere in essi impedita o difficultata la perdita del gas; ma so altresì che l'acqua che entra in un simile canale dopo aver corso per canale aperto, vi entra già in parte scomposta, onde, supposto ancora che si renda nel condotto tondo indecomponibile, vi porta assai materia da depositare, onde lasciare, particolarmente in alcune parti di esso, non lievi indizj del suo passaggio. Nè posso ignorare che l' acqua di tal natura, ancorchè scorra continuamente per canali chiusi, pure non lascia di produrre qualche grado di incrostamento alle loro pareti, tanto più distinto e grande, quanto è maggiore il tempo del suo corso. Cosicchè tenue essendo nei nostri canali la crosta tartarosa, malgrado la qualità tartarizzante dell'acqua, breve a proporzione conviene che sia stato il tempo che hanno essi continuato a condurla. Non voglio però denotare con ciò un sì breve spazio che non comprenda più diecine d' anni e non possa anche estendersi ad una parte del secolo seguente. La vendita del ferro ritratto dal bottino di Querciagrossa fatta nel 1376 rende verisimile la congettura che poco innanzi fosse ultimato il lavoro di questi canali. In quel tempo non era spento nei Sanesi lo zelo per il mantenimento dei bottini, perchè nello stesso libro delle revisioni di ragioni di Camarlinghi del Magistrato di Biccherna segnato di num. II. dall'anno 1367 all'anno 1376, che esiste nell'Archivio delle Riformagioni, all'anno stesso 1376, in cui si tratta della suddetta vendita di ferro, apparisce ancora la spesa di fiorini circa 113 *per nettare e ripulire il buttino della fonte del Campo*. Ed il vedersi che l'acqua di Mazzafonda, che per le determinazioni del Consiglio della Campana del 1389 e del Concistoro del 1398 sopra citata dovea esser condotta in Fontebranda, fu invece introdotta nel bottino della fonte di Piazza (Tav. I.), fa conoscere che si pensava tuttora a rendere que-

sta

sta fonte doviziosa di acqua a preferenza di Fontebranda, non ostante l' impegno di diversi corpi di arti interessati per accrescere le vene di Fontebranda. Seppur non vogliasi che la variazione dipendesse dal caso, cioè dall'essersi trovati più alti che non credevano col bottino di Mazzafonda, o dal bisogno di crescere l'acqua della fonte di Piazza per motivo appunto della diminuzione o perdita di quella dei condotti della Staggia.

§. XXV. Come finalmente cessasse l' acqua di scorrervi potrà in qualche modo, nè senza molti gradi di verisimiglianza, congetturarsi, combinando la struttura dei condotti con le circostanze dei tempi, che successero immediatamente alla loro fabbricazione. Se è vero, come pare che il Fondi abbia posto nella maggiore evidenza, che l' imboccatura del canal quadro o aperto nel canale tondo fosse al podere delle Rede, dalla sola ispezione del profilo della livellazione da esso fatta (Tav. III.) si conosce che da questo punto a quello di Querciagrossa, dove per i bassi dell' Olmicino doveva risalire l'acqua, non vi è tal differenza di altezza per potersi eseguire il passaggio con felicità. Talchè l'acqua non solo dovea scorrere per questo pezzo di canale con pochissima celerità, ma ancora facilmente deporre nella parte più bassa di esso, e ogni giorno accrescere gli ostacoli al suo corso. Io dunque penso che il canale tondo, che nei principj non avrà certamente condotto gran copia d'acqua, ma però sufficiente a contentare la moltitudine, avrà a poco a poco e per gradi quasi insensibili diminuita la quantità dell'acqua che versava nel bottino maestro, che non sarà stato facile l'accorgersene senza usarvi un'assidua vigilanza. Ma come credere che si usasse una tal vigilanza in quei torbidi tempi, nei quali la Città era divisa in fazioni, secondo la cui preponderanza cangiavasi la forma del governo e l' influenza dei Magistrati, e dominavano persone di differente carattere guidate da privati odj ed interessi, e da mire del tutto opposte? Tutto infatti da lì in poi spira in questa parte oscitanza e negligenza, e la deliberazione sopra riferita (§. XXIII.) del 1462 relativa al bottino maestro da Fontebecci fino al Castagno, il quale era ridotto in così infelice stato da esser perduta ancora l'acqua del Castagno, prova che era grandissimo tempo che non si pensava più ai bottini, ed in conseguenza neppure ai condotti dell'acqua della Staggia, dei quali a quell' epoca sembrava estinta perfino la memoria; non scusando che i Sanesi poco dopo il principio del XV. secolo profondessero somme nell'abbellimento esterno della fonte di Piazza, perchè altre sono le molle che spingono a fare le opere nuove e di fasto atte ad imporre alla moltitudine, altre quelle che dispongono alle utili, ma oscure e ordinarie.

§. XXVI.

§. XXVI. Quello però a cui non erasi più pensato per il corso di circa quattro secoli, cioè di ricondurre alla Città le acque delle sorgenti della Staggia e redimerla in tal modo da quella inevitabile penuria, e dalle incertezze e pericoli, cui è stata sempre soggetta da che furono fatti gli attuali bottini (§. XX.), è stato replicatamente rimesso in campo nel presente secolo. Ho già accennato ciò che fu trattato nel Collegio di Balia l'anno 1712 (§. XIII.), e coerentemente a queste proposizioni il Bottiniere Fondi, oltre all'aver ritrovato l'andamento dell'antico condotto (§. XIV.), presentò delineato il profilo della livellazione fatta per tale oggetto (Tav. III.) ed insieme le proposizioni concertate con altri, dei quali non apparisce il nome, che si conservano soltanto in minuta. Ivi s'adotta il sistema di far superare all'acqua il fondo della Staggia, quello dell'Olmicino, e l'altro tra il Poggiarello e l'Olmo con canne forzate, come all'incirca praticarono gli antichi. Siccome però dalla relazione non apparisce come al podere delle Rede diasi all'acqua un'altezza o pressione sufficiente per superare agevolmente l'altura di Querciagrossa, non potendo adempire all'oggetto la conserva che propone farsi quivi il Fondi nella prima sua relazione del 15 Dicembre 1712, è chiaro che questo progetto adottava i difetti medesimi che aveva l'antico condotto (§. XXV.) ed esponeva il lavoro allo stesso infelice esito. Ma questo affare, sia che le abbondanti piogge cadute nell'anno seguente e successivi ne temperassero il bisogno, sia che la Deputazione fosse disanimata dall'essere esauste le casse pubbliche come dai libri appare, andò allora in dimenticanza, nè mai più ne fu trattato fino all' anno 1794, in cui il Magistrato Comunitativo Civico con sua rappresentanza del dì 14 Gennajo energicamente lo ripropose a S. A. R. il regnante Gran-Duca, come il solo mezzo di porre una volta fine ai disagj e ai danni gravissimi che nascono in varia foggia dalla scarsità dell'acqua dei bottini della fonte di Piazza; convinto dall' esame della precedente Relazione presentata al Real Governo in nome della Deputazione Medica e dal Governo medesimo rimessa al Magistrato, ed ammaestrato dalla assoluta inutilità dei tentativi e sforzi fatti dall'Ingegnere Matteucci quando per quattro intieri anni, cioè dall'anno 1780 fino all'Agosto dell'anno 1783, per commissione speciale del Magistrato di Biccherna, che allora presiedeva a questo dipartimento, si era impegnato a dirigere la ripulitura dei bottini ed a rintracciare con diligenza le perdute vene ed allacciarne delle nuove. Poichè sebbene gli fosse riuscito con la sua indefessa assistenza e patriottico zelo portare la quantità dell'acqua da barili 4218 $\frac{3}{4}$ nel corso di un giorno, come l'aveva trovata il 20 Settembre del 1780 nel punto della maggior siccità dopo essergli

stati

ſtati consegnati i boctini, a barili 12217 ½ in tempo eguale, quanta era nel massimo asciuttore dell'eſtate del 1783, allorchè ne fece la reſtituzione; pure malgrado le cospicue somme impiegatevi e la continuazione delle cure del Magiſtrato della Comunità Civica, succeduto a quello di Biccherna, la quantità dell'acqua dei bottini della fonte di Piazza era dopo quel tempo andata progressivamente così diminuendo, che fatto dallo ſtesso Matteucci nell'Aprile 1794 nuovo sperimento della quantità, non eccedeva barili 2700 in 24 ore, e le fonti, alle quali suole diſtribuirsi, erano negli asciuttori ridotte all' eſtrema penuria. L' Ingegnere Matteucci, incaricato l' anno ſtesso di fare le livellazioni, perizie, e proposizioni per l' esecuzione del progetto di ristabilire il corso alla Città delle sorgenti del fiume Staggia, nella sua Relazione che presentò al Magiſtrato Comunitativo il dì 11 Agoſto dell' anno ſtesso (1), rimase

 egli

(1) Per compimento della storia di queſti condotti e dei varii progetti ſtati sin'ora fatti per ricondurre alla Città le acque delle sorgenti della Staggia, non spiacerà di vedere quivi riportati i risultati della livellazione dell' ingegnere Matteucci contenuti nella citata sua Relazione, i quali si riducono ai seguenti:

Dalla sorgente della Stella a quella di Vignale vi corre la distanza in linea serpentina di catene 77 (o sia Bracc. 1925) *colla pendenza ed inclinazione naturale di braccia* 161 *soldi* 18 *e* 2.

Dalla sorgente di Vignale all' altra di Vignalino catene 42 *e bracc.* 17 (Bracc. 967) *di diſtanza, e bracc.* 77 *e sol.* 9 *di pendenza.*

Dalla sorgente di Vignalino a quella di Quietole attraversando la Staggia con una botte di catene 8 *e bracc.* 8 (Bracc. 208) *di lunghezza, vi è la diſtanza di catene* 53 *e braccia* 13 (Bracc. 1338), *e di pendenza bracc.* 58 *sol.* 1 *e* 9.

Dalla sorgente del Trogolo di Fonterutoli alla sorgente del Romito vi è la diſtanza di catene 137 *e bracc.* 21 (Bracc. 3446), *e la pendenza bracc.* 155 *e sol.* 5.

Dalla sorgente del Romito a quella di Quietole vi è la lunghezza e diſtanza della botte che attraversa la Staggia di catene 14 *e bracc.* 6 (Bracc. 356), *che ſta in livello.*

Da Quietole, punto di riunione di tutte le sorgenti, al primo canale forzato presso Petrojo vi è l'intervallo di catene 181 *e bracc.* 3 (Bracc. 4528) *e la pendenza di bracc.* 71.

Queſto primo canale forzato, che si eſtende per catene 121 *e bracc.* 14 (Braccia 3019), *giungendo fin verso la Parrocchia di Querciagrossa, l' acqua viene a rimontare bracc.* 22 *e sol.* 2 *più bassa del punto ove ha principio la discesa.*

E' inevitabile immediatamente dopo di queſto un secondo canale forzato di catene 26 *e bracc.* 3 (Bracc. 653) *di lunghezza, quale va a terminare di fronte al podere di Arginano colla discesa di bracc.* 1 *sol.* 15 *e den.* 3.

Dipoi dopo una circonfleſsa tirata di catene 49 *e* 8 (Bracc. 633) *di diſtanza livellata si giunge presso la Chiesa di S. Stefano.*

Un terzo canale forzato di catene 55 *e bracc.* 7 (Bracc. 1382) *di eſtensione si richiede in queſto intervallo per far rimontare l'acqua di fronte al podere della Ripuccia.*

E fi-

egli pure attaccato al sistema dei canali forzati ove erano interposti dei bassi-fondi, nel modo che avevano usato gli antichi, specialmente in veduta di moderare la spesa; ma non mancò di correggere quel sopra enunciato radicale loro difetto, volendo che s'incominciasse a forzare l'acqua dal podere di Petrojo, e così da un punto molto più alto di quello che fatto avessero gli antichi ed incautamente avesse il Fondi adottato.

§. XXVII. Rivolgendoci ora a dare una vista generale alla storia dei condotti delle acque Sanesi ne apprendiamo che gli attuali bottini non corrisposero in alcun tempo ai bisogni della Città, nè allo scopo e desiderio degli abitanti, che le acque da essi somministrate furono fino dal principio riconosciute scarse e insufficienti, e che nè per aumenti fatti ai medesimi sullo stesso piede, nè per industria o artifizio nel ricercare e raccogliere gli stillicidj e le vene più durevoli e abbondanti, nè per diligenza e spese di manutensione e di acconcimi, giammai è riuscito procacciare stabilmente tal copia di acqua, onde veracemente ne provenisse alla Fonte Gaja quella abbondanza che dagli Istorici si esagera. La storia fedele ed imparziale concorda con le osservazioni fisiche nel dimostrarne l'originaria, intrinseca, e costante insufficienza, e nell' additare il rimedio unico, sicuro, efficace. Stando questo rimedio nell'acquisto di acque vive, copiose, e perenni, deonsi riguardare coi sentimenti più schietti di riconoscenza le incessanti premure di S. E. il Sig. Vincenzo Martini Consigliere intimo attuale di Stato e di Finanze di S. A. R. e Luogo-Tenente Generale e Governatore della Città e Stato di Siena, dirette a procurarne a questa stessa Città il godimento ed a por termine ai mali che dalla scarsezza derivano; e deesi pure applaudire al patrio zelo e savia fermezza della Magistratura Comunitativa Civica annuale, che oltre ad avere fatto l'anno 1794 reiteratamente il progetto di ricondurvi le sorgenti del fiume Staggia, le sole del circondario capaci di provvedere

---

E finalmente la distanza di catene 84 *e bracc.* 10 (Bracc. 2110) *conduce al termine dei condotti superficiali murati presso il podere del Poggiarello* (§ XVIII.) *dove si ha tutto il fondamento di credere, che possa aver principio l' abbandonato ripieno bottino di Piazza, e che possa estendersi per il corso di catene* 60 *circa* (Bracc. 1500) *colla discesa e pendenza di bracc.* 14.

Poichè dunque la lunghezza di ciascuna catena è di braccia Fiorentine 25, e che cento catene o sia braccia 2500 formano il miglio, l'estensione totale del lavoro proposto di catene 853 e bracc. 2 assegnato ai canali da costruirsi, e di catene 60 assegnate al bottino che si suppone ripieno, sarà di catene 913 e braccia 2, che sono miglia nove ed un' ottavo circa. Il totale poi della pendenza sarà di braccia 569 e sol. 8.

vedere la Città e corrispondere agli usi estesi e multiplici che se ne attendono, non ha dipoi omessa occasione di manifestare l' ardente pubblico desiderio della pronta e compiuta esecuzione; alla cui finale decisione altro omai non manca che il risultato dell'esame, che il Reale nostro Sovrano FERDINANDO III., quasi un pegno delle sue cure paterne e della importanza che pone nella felice riuscita di sì grand'opera, ne ha confidato al Sig. Giuseppe Salvetti, uomo di profonde cognizioni e di consumata esperienza in simili opere. Nè infatti saranno mai troppe le precauzioni dacchè altra volta la stessa impresa, parte per difettosa esecuzione in quei tempi, nei quali le operazioni di tal genere erano condotte dal caso o al più da una pratica oscura e grossolana, parte per incuria e per l' influenza di varie cagioni morali e politiche (§. XXV) videsi in breve tempo mancare con gravissimo danno della Città. Il Pubblico Sanese dee dunque esigere che senza accettazione di teorie e di sistemi e senza risparmio di spesa sia prescelto il metodo più atto a corrispondere alle sue mire ed a prevenire altra uguale disavventura; dee cercare nella esecuzione la stabilità e sicurezza, onde renderne il benefizio costante e perpetuo; dee soprattutto proporsi, come oggetto degno del suo pensiero e dei suoi maggiori sforzi, di troncare i mali incalcolabili, che per la scarsità dell'acqua piombano annualmente sulla classe più numerosa dei Cittadini. Così l'inclita Città di Siena agli altri nobilissimi suoi pregj accoppierà quello interessantissimo della perfetta salubrità dell'aria, largamente ad essa conceduta per la natura del suolo, sol che si distruggano le cagioni avventizie, che nell' estate ed autunno alquanto la turbano. Ed io sarò pago, se con questi qualunque siansi miei scritti

. . . . Fungar vice cotis, acutum
Reddere quæ ferrum valet, exors ipsa secandi.

ANALISI CHIMICA

Delle acque delle sorgenti del fiume Staggia e di Cambolli

DEL MEDESIMO AUTORE

ILLUSTRISS. SIGG. GONFALONIERE E PRIORI RAPPRESENTANTI LA COMUNITA' CIVICA DI SIENA.

§. I. SE si osservi dallo stesso loro crine non lungi dalla Fonte Stella l'andamento dei monti, onde scaturiscono le acque contemplate per tradursi a questa Città di Siena in sequela alla nostra Relazione trasmessa al Real Governo fino dal dì 3 Agosto 1793, esso comparisce disposto a foggia di S, il di cui maggiore asse quasi coincide con una linea tirata da levante a ponente. Da tale andamento risulta una valle ed una convessità verso mezzogiorno, ed altra valle e convessità verso settentrione, con quelle diramazioni e valli subalterne proprie di luoghi montuosi. La valle e convessità meridionale acquapendono nel fiume Staggia, il quale prende l'origine principalmente dalle sei sorgenti, delle quali le SS. LL. Illustrissime, secondando saviamente le provide cure di S. E. il Sig. Luogo-Tenente Generale e Governatore, con Lettera de' 28 del caduto Agosto si degnarono commetterci l'esame all'oggetto di riconoscerne le qualità, ed assicurarsi della loro bontà e salubrità prima di proporne la traduzione alla Città. Nella valle poi settentrionale, che acquapende in Arbia, scaturisce la sorgente di Cambolli, non compresa fra quelle additate nella citata Lettera delle SS. LL. Illustrissime, ma dall' Ingegnere Sig. Antonio Matteucci (1) riputata opportuna allo stesso oggetto, di cui perciò abbiamo associato l'esame.

§. II. La sommità di questi monti è formata di pietra calcaria, per la maggior parte galestro o alberese, i cui filoni scendono inclinati

(1) Nella sua Relazione del dì 8 Agosto 1794 avverte il Matteucci di aver riconosciuto e riscontrato esser questa sola sorgente *più abbondante dell'acqua tutta che conducono alla Città gli attuali bottini* della fonte di Piazza; che per altro per non eccedere la commissione non ne aveva fatta la livellazione per assicurarsi se mediante il traforo del monte potesse guidarsi alla volta del Trogolo di Fonterutoli o ad altro luogo più opportuno.

clinati lateralmente e nudi fin dove ha principio il terreno ridotto a cultura. Tutte le sorgenti mentovate sgorgano dal seno del monte sul confine dell'orrido dorso col terreno inferiore suscettibile di coltivazione; sebbene alcune abbandonate a se stesse, o condotte per canali artefatti, non si manifestino che più lontano ed in basso.

§. III. La sorgente inferiore a tutte è quella, che si manifesta alla sinistra del fiume Staggia nel podere di Quietole, quasi sull'ingresso della valle meridionale, tradottavi per canale artefatto; cui sta di fronte nell'opposta pendice alla destra dello stesso fiume la sorgente del podere del Romito, la quale abbandonata a se stessa nella massima parte filtra per il terreno sottoposto. Succedono nella stessa parte orientale della valle le altre tre sorgenti, cioè primieramente quella del podere di Vignalino, più oltre quella del podere di Vignale, ambedue condotte per fosso scoperto selciato, e finalmente quasi al termine della valle dallo stesso lato inclinante a mezzogiorno la fonte Stella, un tempo rinomata, in oggi scarsissima e lasciata in abbandono. Nel convesso del monte al principio di una delle accennate subalterne valli nasce l'altra sorgente condotta per canale al così detto Trogolo di Fonterutoli, e dal fianco opposto del medesimo monte, dove appunto termina il filone della pietra che ne cuopre il dorso, sgorga la sorgente del podere di Cambolli; delle quali tutte si tralascia di descrivere le situazioni per essere già state con precisione stabilite dal Sig. Matteucci.

§. IV. Nell' esserci portati due di noi sulla faccia del luogo era nostro principale scopo di esaminare le qualità sensibili di ciascun' acqua alla stessa loro scaturigine. Osservammo primieramente il grado della loro limpidezza, che per quanto fosse in generale soddisfacente, pure non poteva essere relativo alla purità originaria delle acque, ma riusciva diverso in rapporto al luogo ed al modo, in cui potevano raccogliersi. Quelle che possono attingersi immediatamente alla loro scaturigine dal seno del monte, o che scorrendo per qualche tratto fanno il tragitto per canale serrato si mostrano più limpide e cristalline. Tali sono le acque delle sorgenti di Quietole, di Fonterutoli, e di Cambolli.. Quelle che filtrano per il terreno superficiale, come la sorgente del Romito, o che spagliano all' intorno, come le acque della fonte Stella, mostrano molti più di quei corpiccioli, che tutte le acque di vena o più o meno ritengono natanti. Quelle infine che scorrono per un fosso aperto o sono percosse dal sole non è maraviglia se talora diventano opaline per aver sofferto un grado di scomposizione. E quando si paragonino insieme due di queste acque, una delle quali sia divenuta opalina e l'altra conservi la sua originaria limpidezza, bisognerà dedurne che la prima è più carica di componenti soliti deporsi in simile

simile circostanza. Di quì ebbesi il primo indizio che la sorgente di Vignalino fosse più delle altre, che scorrono all' aperto, carica di terre, tenutevi in dissoluzione per l' intermedio dell' aria fissa.

§. V. Per simili ragioni il gusto non ne è egualmente grato e coerente alle quantità respettive dei componenti di queste acque. Quelle che si attingono all' immediata loro scaturigine, o che hanno fatto breve corso per canale chiuso, generalmente sono più grate e vivaci, ed apparentemente meno crasse. Tali sono le sorgenti di Quietole, del Trogolo di Fonterutoli, e di Cambolli. Se hanno filtrato o spagliato per il terreno, o hanno sofferto un grado di scomposizione sono men grate ed appariscono a chi le assaggia alquanto più crasse; e perciò non solamente l'acqua di Vignalino più carica di componenti, ma quelle che si dimostreranno le più leggiere e le più pure, sembrano al gusto più crasse e più gravi delle altre.

§. VI. Queste osservazioni fanno conoscere bastantemente, che l' occhio ed il palato non sono giudici idonei della bontà sì assoluta, che relativa di queste acque; mentre le loro qualità sono alterate da varie circostanze estrinseche all' originaria natura delle medesime, le quali rendono erroneo il giudizio dei due sensi. Quindi ci applicammo a determinarne con esattezza la gravità specifica, che alla temperatura respettiva fu riscontrata come appresso:

	Peso specifico	Temperatura
Acqua distillata - - - - - - - - - -	1, 00000	Gr. 17
Acqua della fonte Stella - - - -	1, 00046	„ 13 ¼
Acqua del Romito - - - - - - - -	1, 00103	„ 14 ½
Acqua del Trogolo di Fonterutoli -	1, 00115	„ 12
Acqua di Quietole - - - - - - - - -	1, 00128	„ 12
Acqua di Vignale - - - - - - - - - -	1, 00132	„ 12
Acqua di Vignalino - - - - - - - - -	1, 00140	„ 11 ¼
Acqua di Cambolli - - - - - - - -	1, 00146	„ 11

La temperatura non è sempre quella delle acque alla origine primitiva, ma quella che avevano nel luogo, ove potevano attingersi in copia all'effetto di determinarne il peso specifico coll' areometro (1).

§. VII.

(1) In questa occasione non fu presa in considerazione la quantità dell'acqua delle mentovate diverse sorgenti. Questa era già stata in parte misurata e in parte valutata dall' Ingegnere Matteucci il dì 3 Aprile 1794 in presenza di S. E. il Sig. Vincenzo Martini Luogo-Tenente Generale e Governatore della Città e Stato di Siena, e di Monsig. Benedetto Pericciuoli Vicario Generale Arcivescovile come Priore del Magistrato Civico

§. VII. Le acque di queste sorgenti cominciano subito a dare indizio della loro tendenza a scomporsi spontaneamente; poichè dove restino stagnanti, o abbiano lentissimo corso generano alla superficie loro una pellicola, la quale nelle acque di Vignalino si è osservata più manifesta, che in tutte le altre. Esse col loro spruzzo non lasciano di produrre un tenue incrostamento sulle vicine piante, per cui si rendono ruvide al tatto. Nel fondo del ruscelletto per cui si scaricano, s' incontra una crosta di tartaro impuro; alcune poi, come quelle del Romito e del Trogolo di Fonterutoli, hanno prodotte delle petrificazioni più insigni. La sola acqua della fonte Stella, tuttochè abbia un moto lentissimo ed a luoghi ristagni, non ha presentati sensibili vestigj di simili produzioni.

§. VIII. Per maggiormente assicurare sul posto la presenza nelle acque delle terre effervescenti tenutevi in dissoluzione dall' aria fissa,

---

Civico della Città, i quali vollero portarsi ad una speciale visita di queste sorgenti. Da tali esperimenti riferiti nella Relazione del Matteucci segnata del dì 5 Aprile dell'anno stesso esistente nell' Archivio della Comunità di Siena risultarono le appresso quantità respettive:

	in un ora	in 24 ore
Sorgente di Quietole Barili	27 $\frac{1}{5}$	656 $\frac{1}{2}$
Del Romito - - „	99 $\frac{3}{4}$	2294 —
Di Vignalino - - „	17 $\frac{1}{3}$	416 —
Di Vignale - - „	27 $\frac{1}{3}$	656 $\frac{1}{2}$
Di Fonterutoli „	41 —	983 —
Quantità sperimentata - „	212 $\frac{3}{4}$	5106 —
Quantità valutata circa „	137 $\frac{1}{4}$	3294 —
Totale - - - - - - - - Barili	350 „	8400 —

E' poi da considerarsi, che i punti, nei quali si è potuto raccogliere le acque per soggettarle alla misura, non sono quelli della loro sortita dalle montagne, ma quelli ai quali le acque sono state derivate per comodo dei contadini e degli usi, che si sono proposti di farne, e per conseguenza dopo aver scorso superficialmente a traverso ai campi per mezzo di fognoni formati di sassi a secco, i quali traviano l'acqua per ogni verso. Che se queste sorgenti venissero rintracciate alle loro scaturigini e guidate all' assegnato destino per mezzo di condotti murati crede il Matteucci che la quantità dell'acqua crescerebbe molto di più.

La quantità dell' acqua della fonte Stella quivi tralasciata, perchè attualmente è quasi del tutto sparsa e traviata, si trova indicata nell'altra Relazione di Matteucci del dì 8 Agosto 1794. Egli trovò che rendeva appena cento barili il giorno. Ma sapendosi che anticamente era una sorgente abbondante e ciò eziandio a memoria di alcuni viventi, merita che sia dessa dilgentemente rintracciata e riunita, potendo servire non solo ad aumentare la quantità dell'acqua, ma ancora attesa la singolare sua purezza, a bonificarla.

lissa, manifestate dai descritti fenomeni, s' infuse in queste acque la carta tinta con la laccamuffa e quella simile stata dipoi alterata dall' acido acetoso. La prima vi prese un rosso smorto e l'altra, nell'atto che sviluppava alcune bollicelle d'aria alla sua superficie, perduto il rosso vivo colore assunse un rosso smorto eguale a quello dell'altra carta, e prosciugata si ripristinò perfettamente nel suo color blù primitivo.

§. IX. Ma poichè i prodotti di queste acque (§. VII.) possono differire secondo le varie circostanze, che vi concorrono, se ne procurò un confronto più esatto coll' esporre all'aria libera in vasi simili quantità eguali di acqua per tempi eguali. Le acque così esposte generarono lentamente alla loro superficie una tenue pellicola la quale acquistava maggior densità a misura del tempo della loro esposizione. In queste pellicole dentro i limiti della estrema loro tenuità si notavano tre gradi. Il primo grado di tenuità devesi all' acque della fonte Stella e del Romito; il secondo alle acque di Vignale e Fonterutoli; il terzo a quelle di Quietole, Vignalino, e Cambolli.

§. X. Succede rapidissima e molto maggiore questa scomposizione allorchè le acque si espongono all'azione del fuoco. Un grado di calore inferiore a quello della ebullizione serviva a sviluppare lentamente delle bolle aeree, ed a produrre contemporaneamente ed in breve tempo l' indicata pellicola colle gradazioni riferite. L' ebullizione dava più sollecita la separazione della stessa terrea sostanza, ma ne restava maggiormente perturbata la trasparenza del fluido.

§. XI. Queste ultime esperienze (§. IX. X.) furono eseguite con le acque attinte alle sorgenti respettive e trasportate in Siena chiuse esattamente in bottiglie; sopra le quali furono pure quivi continuati gli altri sperimenti diretti a conoscerne la qualità e quantità prossima dei componenti per mezzo dei reagenti e di altre necessarie operazioni.

§. XII. Incominciando pertanto dagli esperimenti fatti sulle acque naturali:

1. L' acqua di calce mescolata con una adequata porzione di ciascuna di esse, vi produsse un dealbamento latticinoso ed un precipitato abbondante, sensibilmente maggiori nell' acqua di Vignalino che in tutte le altre.

2. La soluzione stretta di alcali vegetabile instillata in altre porzioni diè in tutte un dealbamento assai tenue, sebbene esso pure alquanto maggiore nell' acqua di Vignalino.

3. L'alcali prussiano non diè la minima produzione di azzurro nè instillato nelle acque naturali, nè in quelle porzioni, ove precedentemente era stata aggiunta qualche quantità di acido nitroso purissimo.

4. La soluzione nitrosa di argento non vi eccitò che un leggiero dealbamento.

5. La

5. La soluzione nitrosa di piombo diè un dealbamento e precipitato abbondante.

6. La soluzione nitrosa di mercurio nelle acque di Quietole, del Romito, di Vignalino, e della fonte Stella diè un precipitato di color bianco sudicio, più abbondante nella terza che nelle altre; ed in quelle di Vignale, Fonterutoli, e Cambolli un precipitato giallo a guisa del turbit, parimente abbondante.

7. Ma sì questi precipitati mercuriali, quanto i precedenti saturnini posti in infusione nell'acido acetoso si disciolsero in totalità senza lasciare alcuna sensibile traccia di residuo indissolubile.

§. XIII. Intanto che si eseguivano i riferiti sperimenti (§. IX. XII.) furono sottoposte alla ebullizione due libbre di ciascheduna delle sette acque in altrettanti evaporatorj di vetro a bagno di arena; e dopo che le acque ebbero formata la loro pellicola e si erano rese torbide, quando l'acqua era già diminuita non poco di volume, nè vi era apparenza che potessero ritenere alcuna porzione di aria fissa e di terre effervescenti in dissoluzione, furono passate per carta, tenendo esatto conto della materia restata nella medesima. Furono quindi tutte le acque condotte a siccità e fu notato il peso dei residui, i quali sommati colle materie dei filtri suddetti diedero le appresso quantità di componenti fissi, contenuti nelle respettive partite d' acqua

Fonte Stella - - - - - - - - -	Gr.	— $\frac{5}{8}$
Vignale - - - - - - - - - - - - -	,,	1 $\frac{1}{2}$
Romito - - - - - - - - - - - - -	,,	3 $\frac{1}{4}$
Cambolli - - - - - - - - - - - -	,,	3 $\frac{1}{4}$
Vignalino - - - - - - - - - - -	,,	3 $\frac{3}{4}$
Fonterutoli - - - - - - - - - -	,,	3 $\frac{7}{8}$
Quietole - - - - - - - - - - -	,,	6 —

§. XIV. Dal residuo della evaporazione per mezzo dell' acqua distillata fu separata la parte solubile nell'acqua fredda, e rimase indisciolta una molto tenue quantità di materia, che potendo essere selenite o esservene compresa qualche porzione, fu perciò fatta bollire a sufficienza nell'acqua distillata. Quindi filtrato il fluido vi furono instillate in porzioni separate le soluzioni dell'acido saccarino e dell'alcali vegetabile, ma niuno di questi reagenti ne alterò punto la limpidezza; lo che escluse ogni parte selenitica.

§. XV. Mediante poi l'affusione dell'acido marino si riconobbe, che questa porzione di materia insolubile nell'acqua sì a freddo, che al calore della ebullizione, altro non era, che una terra effervescente passata per la carta nella prima filtrazione, e perfettamente simile a quella contenuta nella carta medesima. Onde considerata questa piccola addizione alla parte maggiore di tali terre ottenute

 col-

colla prima filtrazione, restò fissato il totale di esse in ciascuna partita di due libbre di acqua al più come appresso:

Fonte-Stella - - - - - - - -	Gr.	—	$\frac{1}{2}$
Romito - - - - - - - - - - - -	„	1	$\frac{1}{3}$
Vignale - - - - - - - - - - -	„	1	$\frac{2}{3}$
Quietole - - - - - - - - - - -	„	1	$\frac{3}{4}$
Trogolo di Fonterutoli - - -	„	2	—
Cambolli - - - - - - - - - -	„	2	$\frac{1}{3}$
Vignalino - - - - - - - - - -	„	2	$\frac{1}{2}$

§. XVI. Ciò che manca a compiere il totale della materia fissa contenuta nelle due libbre di ciascun'acqua (§. XIII.) era stato disciolto dall'acqua stillata fredda affusa a ciascheduno dei residui respettivi nella dose di due once; con che tutta la parte solubile venne ridotta in un volume di acqua eguale alla dodicesima parte di quella che era stata evaporata. Nella qual soluzione divisa in più porzioni furono istituite le seguenti esperienze per rilevare quali sostanze saline contenesse.

1. Instillata adunque in una di dette parti la soluzione nitrosa d' argento diè in tutte nell' istante un precipitato a strie che si depose prontamente al fondo, indi tutto il fluido s' intorbidò lentamente. Questo precipitato fu tenuissimo nell' acqua di Quietole, poco maggiore nell' acqua di Cambolli, alquanto più abbondante nelle altre.

2. La soluzione di terra pesante nell'acido marino introdotta in altra porzione della soluzione diè un precipitato tenuissimo ed appena sensibile nelle acque di Vignale e Fonterutoli, tenuissimo in quelle di Vignalino, fonte Stella, Cambolli, e Romito, tenue in quella di Quietole.

3. L' acido saccarino diluto non diè a conoscere in veruna di esse alcuna sensibile reazione.

4. L'acqua di calce le dealbò tutte leggierissimamente.

5. Nè sensibilmente maggiore fu il dealbamento prodottovi dalla soluzione stretta di alcali vegetabile aerato.

§. XVII. Da queste esperienze (§. XVI.) si deduce con sufficiente certezza esservi in ciascun' acqua dei sali risultanti dalla combinazione dell'acido marino (1) e dell' acido vitriolico (1, 2) con qualche base; che una parte di queste basi, esclusa la calce, (1, 3) è costituita dalla magnesia (4, 5); che secondo le indicazioni respettive dei reagenti prevalendo la quantità degli acidi (1, 2) alla quantità di magnesia (4, 5) necessaria alla loro saturazione, una parte degli acidi dee esser combinata con l'alcali minerale, e perciò, oltre un poco di sale di Epsom o di sal marino a base di magnesia, non dee mancarvi una porzione di sal marino comune, piuttosto che un sale Glauberiano, atteso che l'acido marino (1) prevale non poco all' acido vitriolico (2).

§. XVIII. La quantità dei componenti salini indicati superiormente, considerati i deboli effetti dei reagenti in proporzione alla quantità di acqua, in cui i medesimi erano sciolti, si manifesta piccola al sommo e grandemente inferiore alla quantità di materia stata disciolta coll'acqua distillata fredda dai residui dell'evaporazione di alcune acque. Bisognò concluderne che specialmente in quei residui, ove risiedeva una quantità esuberante di sostanze solubili, fosse compresa qualche altra sostanza non salina e per conseguenza una materia estrattiva; la quale induzione veniva confermata dal colore dei medesimi più o meno fosco a confronto degli altri assai candidi e dal color giallastro, quale suole indursi dalle materie estrattive, preso dalle soluzioni; differenze che apparivano più rimarchevoli nelle acque di Quietole, dal cui residuo l'acqua distillata fredda avea disciolto non meno di quattro grani di sola materia estrattiva.

§. XIX. Si può conchiudere, che tutte le acque esaminate contengono: 1. Terre effervescenti (§. VII. VIII. IX. XII.) nelle respettive quantità già sopra (§. XIII.) indicate; 2. Aria fissa (§. VIII. XII. 1) in quantità per lo meno proporzionata a sostenere in dissoluzione nell'acqua le respettive quantità di dette terre; 3. Sale d'Epsom o sal marino a base di magnesia, e sal marino comune (§. XVII.) in quantità minime (§. XVIII.) e indeterminabili col solo mezzo dei reagenti; 4. Sostanza estrattiva mucilaginosa (§. XVIII.) mancante o indiscernibile nelle acque di Vignale e della fonte Stella, ma molto distinta nelle altre e superiormente in quella di Quietole; 5. Che sono del tutto scevre di ferro (§. XII. 3) e di selenite (§. XIV.).

§. XX. Se si passi a paragonare questi risultati con quelli che si ottennero dall'analisi delle acque, che governano attualmente le fonti di Siena, si dovrà concluderne, che sì le une che le altre sono della medesima indole, perchè alla sola riserva della quantità tenuissima ed assolutamente disprezzabile del ferro contenuto nelle ultime, tutte forniscono i medesimi componenti sì volatili che fissi, e perchè sì nelle une che nelle altre il predominio si deve alle terre effervescenti suscettibili di separarsi dall'unione dell'acqua a misura che si disperde l'aria fissa, mezzo della loro dissoluzione, e perciò di produrre nei canali, per cui scorrono, grume e tartarizzazioni ed altre sorte di deposizioni secondo le circostanze; che l'acqua della fonte Stella, prescindendo dalle qualità estrinseche, che acquista dal suolo per cui scorre negletta, per la cospicua sua leggierezza riscontrata con sensibilissimo areometro e per la somma scarsità delle terre effervescenti, gode sovra ogni altra molti gradi di preminenza; onde essendosi nella massima parte deviata e dispersa, merita che si usi ogni diligenza per

rintracciarla e riunirla in quantità, che giovi incanalarla, e quando non piacesse condurla in cannone distinto, serva a bonificare la massa delle acque; che tra le altre le acque del Romito, di Quietole, e Vignale alla stessa sorgente possono riputarsi eguali in bontà a quelle della fonte di Piazza e di Fontebranda; che quelle soltanto del Trogolo di Fonterutoli, di Vignalino, e Cambolli restano alquanto inferiori.

§. XXI. Nell'assegnare con scrupolosa esattezza il rango respettivo a queste acque comparandole tra loro e con l'acque attuali delle fonti di Siena, siamo molto lungi dal volerne trarre un motivo di esclusione per quelle sorgenti, le cui acque in vista di un leggiero eccesso di terre effervescenti si sono dovute considerare alquanto inferiori alle altre. Poichè in primo luogo, lasciando di riguardarle in linea di comparazione e prendendole sotto un punto di vista assoluto, fa d'uopo convenire che le quantità di terre indicate sono molto al di sotto di quei limiti, dentro i quali le acque sono e si reputano comunemente salubri e pregevoli. In subalterno luogo giova considerare che il piccolo eccesso, non assoluto, ma semplicemente relativo di tali terre, viene ad essere largamente compensato dalla somma scarsezza della parte salina e dalla assenza totale di selenite. Devesi riflettere in ultimo luogo che i paragoni sono stati fatti delle acque cadute sotto il presente esame, quali sono state riscontrate alle loro scaturigini, con quelle delle fonti di Siena già pervenute al loro destino e molto depurate nel loro corso. Che se non perdasi di vista che le nuove acque per essere tradotte alla Città ed alle stesse fonti dovranno percorrere circa dodici miglia di acquidotti convenevolmente costruiti, ove successivamente dovranno deporre nuove porzioni di tartaro e depurarsi per mezzo dei consueti purgatorj, ciascuno converrà con noi senza difficoltà che tutte alfine potranno giungere alla loro destinazione così impoverite e purificate dalle terre, che contengono alle sorgenti, onde superare non poco in bontà le acque, dalle quali la Città di Siena è stata sinora troppo scarsamente provveduta.

§. XXII. Per tali ragioni approviamo pienissimamente la scelta di qualunque delle sette sorgenti di acque esaminate in questa Relazione, e nell'atto di rimettere alle SS. LL. Illustriss. il nostro concorde sentimento, abbiamo l'onore di essere con profondo ossequio

Delle SS. LL. Illustriss.

Dalle nostre Case li 9 Settembre 1794.

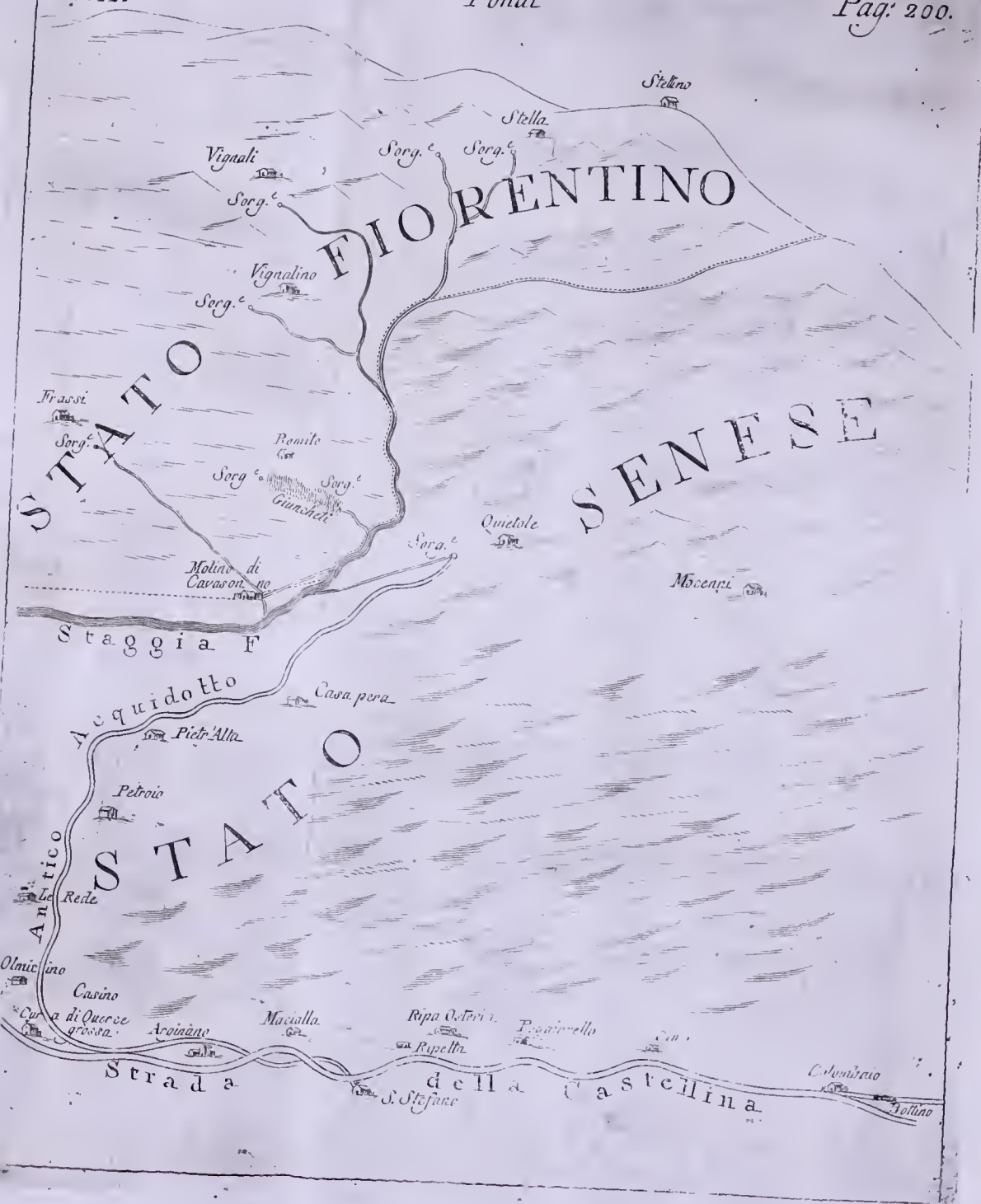
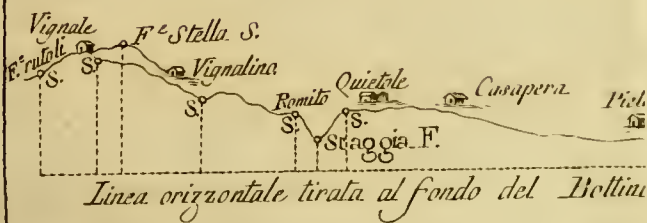
Devotissimi Obbligatissimi Servitori

C. {
Domenico Battini P. Professore di Medicina Pratica.
Biagio Bartalini P. Profess. di Storia Naturale, Chimica, e Bottanica.
Gio: Niccolò Semensi P. Professore di Medicina Teorica.
Giuseppe Ledoli P. Professore di Chirurgia Teorica.
Galgano Petrucci Medico Fisico.
}

Tav: I.
Pag: 200.
PIANTA TOPOGRAFICA
dei Bottini della Fonte di Piazza
della Città di Siena
Spiegazione delle Abbreviature
R. Ramo di Bottino
F. Fonte Pubblica
I. Ingresso di Bottino
O. Occhio di Bottino
Segno che accenna un Pozzo particolare
SIENA
Strada di Camullia
Porta Camullia
Strada del Bastione
Porrone
Borgo
Cappuccini
S. Petronilla
Strada di Pescaja
Strada della Castellina
Strada Fiorentina
Strada d'Uopini
Torre Fiorentina
M.te Celso
Podere del Sig. Grassi
Monte Arioso
Rinfusola
I. del Castagno
I. del Colombajo
Abbadia a quarto
O. del Noce di S. Petronilla
I. nel Podere del Paradiso
I. in Mazzafonda
F. Giusta
F. di S. Francesco
F. del Ponte
F. di S. Martino
Scala di Canne 450 Sanesi
100
300
450

dell antico Acquidotto della Fonte della Piazza
e tracce di altra del 1712 del Bottiniere Giuseppe
Fondi

Pag: 200.

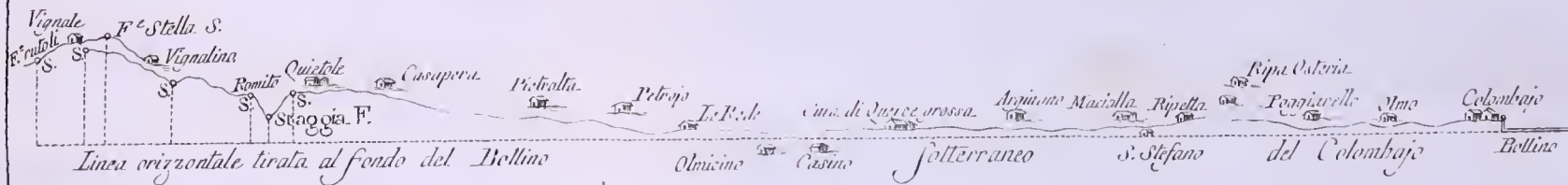
Pianta dimostrativa dell antico Acquidotto della Fonte della Piazza di Siena fatta sulle tracce di altra del 1712 del Bottiniere Giuseppe Fondi

Tav.a II. Pag: 200.

Profilo della Livellazzione fatta nel 1712 delle Sorgenti di Vignale Vignalino Romito e Quietole coll'aggiunta della

Tav.a III — Livellazzione di Fonte Stella e Fonterutoli fatta nel 1792 — Pag: 200.

100 200 300 400 500

Scala di Canne 500 per le lunghezze

100 200 300 400 500

Scala di Braccia 500 per le altezze

ISTORIA

DI UN ERMAFRODITO

DELLA SPECIE BOVINA.

IN Caldana piccolo Caftello della Provincia Inferiore Sanese sotto la Potesteria di Giuncarico l'anno 1789 nacque un Vitello da una delle vacche di un certo Giovanni Tosi, che nel crescere non mostrò quel consueto ingrandimento nella borsa ove sogliono contenersi i testicoli, ma l'ebbe sempre piccola, raggrinzata, ed attaccata come sogliono averla gli animali di tal genere che sono ftati castrati; nonostante presentava l'aspetto di toro, e nel branco ne faceva le funzioni con molta vivacità.

Nel 1797 il Tosi ebbe bisogno di una bestia bovina per il lavoro, domò questa, se ne servì per tre anni, ed appresso nel mese di Novembre del 1797 la vendè a un tal Bardini, che la rivendè a un certo Lotti lavoratore di un podere delle Masse di Siena detto Canneto, che dopo essersene servito per il lavoro ed averla ingrassata, come sono soliti di fare ogni anno i contadini dei pressi della Città, intorno al 10 Aprile del 1798 la passò per carne a un tal Ceroni Beccajo. In tutto l'indicato tempo secondo le relazioni che ne ho avute conservò l'aspetto di Toro con tutte le qualità, che sogliono caratterizzare il maschio di questa specie.

Ucciso il suddetto animale, ed aperta la cavità del basso ventre si presentò agli uomini del Beccajo fra la vescica, l'intestino retto, e i reni, un budello che mai si erano trovati a vedere nei Buoi, il quale si divideva in due parti, destra, e siniftra, ripieno di un fluido; onde sorpresi dalla nuovità ad uno di costoro chiamato Gaetano Tommasini venne in mente di separarlo, e di portarlo alla scuola d'Anatomia perchè fosse esaminato.

Lo separò con la vescica, e l'inteftino retto, tagliò il membro genitale nel perinèo, lo rovesciò sopra uno dei cosci come son soliti di fare, e portato l'indicato budello allo Spedale, trovò la scuola di Notomia chiusa, passò alla Medicheria, e lo consegnò, come, mi disse all' Infermiere Gambini, ed ai Giovanì Chirurghi, perchè fosse

fosse trasportato all'Anatomia. I Giovani per un' apertura, fatta siccome era molto voluminoso, evacuarono il fluido che conteneva, che fu valutato intorno a 15 o 16 libbre. Questo fluido era di un color biancastro alquanto opaco, ed aveva l'odore del siero, secondo mi riferirono. In seguito fu fatto portare alle stanze dell'Anatomia. Io era lontano. Tornato il giorno dopo, ed essendomi messo ad esaminare il sopraddetto budello, riscontrai, che presentava tutti i caratteri di un utero vaccino con la sua vagina, che in cambio di avere l'apertura all' esterno, con apertura capace del capo di un mediocre spillo metteva foce nell'uretra nella parte media della base del grano ordeaceo fra le aperture dei due canali spermatici.

Immediatamente andai a trovare il Beccajo, ricercai se esistevano i quarti di dietro, e per buona fortuna rimaneva in totalità la parte posteriore tagliata al davanti dei reni, onde potei avere la verga, che vi era ancora attaccata, e quei due corpi, che occupavano lo scroto, che credeva fossero i testicoli avvizziti dopo la castratura; in somma tutto quello, che bisognava per poter fare idea della struttura delle parti della generazione di quest'animale.

Fatto ciò tornai ad esaminare le dette parti, e prima di tutto procurai di riempiere di materie colorate i vasi sanguigni, essendomi riuscito bene riguardo alle arterie, non così per le vene, attese le valvule. Riempiei ancora qualche vaso linfatico col mercurio per conservare poi il pezzo.

A prima vista i due corpi, che si trovavano situati ove sogliono essere le ovaje, furono da me presi per le ovaje medesime; ma essendomi posto ad esaminarli riscontrai, che erano veri testicoli. Trovai i respettivi vasi deferenti, v'introdussi uno di quei tubi di vetro, che adopero per l' injezione dei vasi linfatici, lo feci riempire di mercurio, e siccome col peso della colonna perpendicolare non era capace di avanzarsi molto, pigiandolo colle dita e impedendo, che non ritornasse indietro forzato dall' elasticità delle membrane, mi riuscì di farli penetrare tutto l'esteso, ed avvolto canale che forma l' epididime, di farli passare i coni che costituiscono il capo dell' epididime stesso, e di farlo introdurre ne' moltiplici, ammassati, e avvolti canaletti, che costituiscono in gran parte la sostanza del testicolo. Voltato poi il tubo verso il canale dell' uretra a seconda del corso dello sperma, il mercurio andava con gran velocità spinto dal solo peso della sua colonna, e mi messe allo scoperto dietro alla vagina, e sulle parti laterali della faccia anteriore per tutta la sua estensione due grossi, e lunghi sacchetti che prima non comparivano.

Questi verso il termine della vagina si congiungevano con le vescichette seminali, che erano manifeste, e prominenti ai lati dell' esterno della vagina, onde si riempirono ancor queste, e quando furo-

furono rese turgide, il mercurio per il canale comune all' istesse vescichette e ai suddetti sacchetti passò nell' uretra per le aperture laterali alla base del grano ordeaceo, e non rimase alcun dubbio, che le parti destinate alla separazione e al trasporto della semenza non rimanessero in totalità nella cavità del bassoventre, e dietro dietro all' utero, ed alla vagina.

Intorno alla parte superiore del testicolo sinistro si vedeva distinto un corpo piccolo, rotondeggiante, riunito al testicolo stesso solamente per mezzo del peritonèo, e dei vasi sanguigni, e linfatici, il quale, nella sua superficie e nell' interno si assomigliava alle ovaje, come potei accertarmene facendone il paragone.

L'aver ritrovato gl' istrumenti destinati alla separazione, e al trasporto della semenza internamente, e l'aver trovato nello scroto quei corpi, che mi figuravo fossero i testicoli avvizziti per la castratura, che presso di noi si pratica stringendo il cordone dei vasi spermatici, e voltando in senso contrario i testicoli, in principio mi fece sospettare, che vi potesse essere un altro apparato per la separazione della semenza, onde feci molte ricerche per vedere se trovavo altre vescichette, oppure altri canali, che comunicassero con quelle; che esistevano; tuttociò fu inutile.

Presi ad esaminare i supposti testicoli, la loro superficie era tutta disuguale, non potei trovarvi vestigio d' epididime, nè di vaso deferente; e solo dei vasi sanguigni, e linfatici che vi s' insinuavano, e del tessuto cellulare. Non erano questi contenuti in un sacco membranoso che equivalesse alla vaginale, nè rivestiti da una membrana simile all'albuginea, e nel loro interno non mostravano il carattere dei testicoli, ma piuttosto quello delle ovaje.

Per farne il paragone presi tutto l' insieme delle parti della generazione di un bue vecchio castrato per lo meno da otto, o dieci anni, ed esaminando i testicoli li trovai ridotti assai piccoli, ma potei riscontrarvi le sue membrane, l' epididime, e il vaso deferente, e a qualche distanza dai testicoli potei insinuarvi il tubo, e riempierlo di mercurio colla sua dilatazione o sacchetto, e con la vescichetta seminale.

Non avendo trovate le suddette comunicazioni, ed avendo rimarcata una differenza così sensibile non sapevo cosa pensare, quando dall' istoria sopra esposta rilevai, che l' animale non era stato castrato, siccome nella borsa non si erano mai fatti vedere, come sogliono, i testicoli.

Tuttociò mi fa sospettare, che i supposti testicoli fossero le ovaje, che occupassero il posto dei testicoli, come i testicoli occupavano quello dell' ovaje.

In questo animale si riunivano le parti maschili della generazione in tutto e per tutto perfette, e come maschio deve aver generato:

nerato: vi si riunivano quelle della femmina ad eccezione delle parti esterne, che mancavano in totalità, e come femmina non poteva generare per la detta mancanza, e per il sito delle ovaje nello scroto distanti dalle trombe, quando non si volesse, che la generazione per questo lato, si fosse potuta effettuare in quel corpo attaccato al testicolo sinistro che sembrava aver tutti i caratteri dell' ovaja. Siccome in quest' individuo si presentava uno dei più perfetti Ermafroditi di cui si abbia relazione nell' Istoria Anatomica (1) mi determinai a farne tirare gli appresso disegni che facendo vedere, e conoscere con chiarezza le parti della generazione del suddetto animale rendono inutile una dettagliata descrizione delle medesime onde me ne astengo e passo alla spiegazione delle Tavole.

Spiegazione delle Tavole.

TAV. I.

Fig. 1.

Questa figura dimostra l' utero e la vagina ripieni di una certa quantità d'aria, veduti dalla parte anteriore, o inferiore, i testicoli situati nel posto delle ovaje con i respettivi vasi, e ricettacoli destinati a trasportare, e contenere la semenza, la vescica, il membro genitale, e l' estremo dell' intestino retto.

A. A. La vagina, la cui lunghezza è pol. 8. lin. 7.

B. B. L' utero.

C. La vescica tirata a destra.

D. D. Il membro genitale ripiegato dalla parte sinistra. La sua estensione in lunghezza dall' unione della vagina coll' uretra al suo estremo è di piedi 2 pol. 11 lin. 2, la larghezza alla radice pol. 4 lin. 11, a poca distanza pol. 3 lin. 4, alla metà della sua lunghezza poll. 3, verso l'estremità ricoperta dal prepuzio pol. 3. lin. 4, sull'estremità poll. 1 lin. 5.

E. L' intestino retto allontanato, e tirato indietro.

a. a. a. a. Il Peritonèo tagliato, che forma le duplicature che comprendono i vasi e nervi, e si ripiega sull' utero, la vagina, e la vescica per formarli, o in totalità, o in parte, l' involucro esteriore, e tenerli collegati alla cavità del basso ventre.

b. b. Porzione della vagina che da questa parte non è ricoperta dal

(1) Nell' Istoria dell' Accademia delle Scienze di Parigi ann. 1720 pag. 38 e segg. ediz. Olan. si riportano le osservazioni di Petit sopra un Ermafrodito della specie umana, che fanno vedere, che aveva una certa somiglianza con questo, ma si rileva che le parti non vi erano così decise.

dal peritoneo, che forma al suo estremo una elevazione rotondeggiante.

La circonferenza di questa porzione della vagina da un ristringimento che si vede a livello dell'estremo anteriore delle vescichette seminali fino all' estremità posteriore dell' istessa vagina varia da poll. 10 e lin. 3 a piedi 1 e lin. 9.

c. L'attaccatura della vagina all' uretra, che comprende il piccol canale di comunicazione della vagina coll' uretra istessa, e i canali spermatici. La sua circonferenza è di poll. 2 e lin: 11.

d. d. Porzione della vagina che dall' indicato ristringimento a livello delle vescichette seminali va continuamente diminuendo in diametro fino alla sua congiunzione coll' utero in quella parte, che può dirsi il suo collo, vedendovisi uno stringimento maggiore.

e. e. Il collo dell' utero (1).

f. f. Il corno destro dell' utero.

g. g Il sinistro. La loro lunghezza, presa la misura sulla parte media, pied. 1 poll. 9 lin. 10. La convessità anteriore dal legamento all' estremo del corno piedi 1 poll. 4 lin. 3. La concavità posteriore pied. 1 lin. 9.

h. Infossamento che si vede nell' unione dei due corni fra il collo dell' utero, e una duplicatura del peritoneo, che li collega dalla parte anteriore ove incominciano ad allontanarsi.

i. Legamento formato da una duplicatura del peritoneo che unisce i due corni. In principio è stretto indi si slarga a poco a poco, e al suo estremo è largo due pollici.

k. k. Estremi dei corni assai ristretti, e loro continuazione nelle

l. l. l. Trombe di Fallopio.

m. m. I Testicoli.

n. n. Porzione degli epididimi.

o. o. I cordoni dei vasi spermatici coll'arterie injettate.

p. p. Porzione dei vasi deferenti ripieni di mercurio.

q. q. q. q. Sacchetti, nei quali si continuano i vasi deferenti, che occupano tutta la lunghezza della vagina. La loro lunghezza poll. 7 lin. 7, il diametro variato dalle lin. 9 alle 6.

r. Vescichetta seminale del lato sinistro.

s. Congiunzione della vescichetta col sacchetto del suo lato.

 t. Ca-

(1) Il Fluido che si conteneva nell' utero, e nella vagina deve aver dilatata questa parte. Nell' utero vaccino in stato naturale, si trova assai ristretta, essendo le sue parti quivi ammassate e formando diverse duplicature a tre ordini, che comprendono tre distinte cavità circondate dai rilievi e incavi delle duplicature stesse, le quali comunicano con anguste aperture, la prima colla vagina e colla seconda, questa colla terza, e la terza col principio dei due corni dell'utero.

t. Canale comune alla vescichetta, e al sacchetto, che secondando l' attaccatura della vagina all' uretra va ad aprirsi nell' istessa uretra, esteso in lunghezza poll. 1 lin. 13.

u. Il collo della vescica che si continua nell' uretra.

w. Il fondo della vescica.

x. L' uraco tagliato.

y. *y*. Gli ureteri tagliati.

z. Sostanza muscolare disposta a strati che circonda il canale dell' uretra.

* Luogo ove il Beccajo aveva tagliata l' uretra, e separata la verga, che fu riunita e fatta disegnare come continua.

1. Altra sostanza muscolare che è formata da strati più grandi, e circonda il bulbo dell' uretra.

2. Porzione del muscolo ischio-cavernoso destro tagliato.

3. 3. 3. I corpi cavernosi del pene.

4. 4. Il corpo spongioso che circonda il canale dell' uretra.

5. Il prepuzio tagliato.

6. 6. L' estremità della verga che potrebbe dirsi il glande, la quale va gradatamente diminuendo in modo, che si rende in fine molto sottile.

7. L' apertura dell' uretra nell' estremità sottile del glande.

8. 8. 8. 8. Muscoli, che nascono intorno alla parte superiore del podice dallo sfintere esterno, i quali circondano l' istesso sfintere esterno, vengono all' inferiore, e producendosi dietro il canale dell' uretra vanno a terminare sul corpo spongioso verso il glande. La sua lunghezza è di piedi 2 poll. 4.

9. L' apertura del podice.

10. Lo sfintere esterno.

11. L' interno.

Fig. 2.

Questa figura rappresenta porzione della faccia interna dell'estremità posteriore della vagina per un apertura fatta affinchè si veda il piccol forame che comunica coll' uretra.

a. *a*. Porzione della parte posteriore, ed esterna della vagina.

b. *b*. L' apertura fatta.

c. *c*. La superficie interna della vagina nel luogo corrispondente alla sua attaccatura con l' uretra accostata all' apertura.

d. Il piccol forame di comunicazione fra la vagina e l' uretra. Le membrane intorno intorno sono alquanto raggrinzate, e formano quei piccoli rilievi, ed incavi che si vedono espressi come tanti raggi, che dal forame si spandono intorno intorno.

Fig. 3.

La figura terza rappresenta porzione del canale dell' uretra aperta dalla parte superiore per far vedere il grano ordeaceo, ed i canali, che vi sboccano.

A. La

A. La parte dell' uretra che si continua col collo della vescica.

B. Quella, che riguarda il seguito del canale.

C. C. Sostanza muscolare formata da molti strati di fibre; come mostra la sua grossezza che riveste la parte membranosa del canale dell' uretra.

D. D. La parte membranosa dell' istesso canale.

a. Rilievo che si osserva tra 'l collo della vescica ed il principio dell' uretra.

b. Il grano ordeaceo.

c. Le aperture dei canali spermatici.

d. L' apertura di comunicazione con la vagina che ammetteva facilmente il capo di uno spillo di mediocre grandezza. Questa apertura gonfiando la vagina non lasciava passare l' aria nell'uretra, come gonfiando l' uretra non la lasciava passare nella vagina. Ciò dependeva dalla corrugazione delle membrane che circondavano il canale. Credo che nel tempo della vita, in cui la corrugazione sarà stata anche maggiore, non potesse aver luogo il passaggio dell' orina, e della semenza dall' uretra nella vagina, e neppure dalla vagina nell' uretra il passaggio di quel fluido, che vi si conteneva.

e. e. Due rilievi, che venendo dalla base del grano ordeaceo, ove si congiungono formando un archetto, si avanzano a qualche distanza sulle parti laterali della superficie dell' uretra e interpongono una sinuosità, che sembra il vestigio di una apertura maggiore di comunicazione fra l' uretra, e la vagina.

f. f. Due altri rilievi, che vengono dalla parte laterale della base del grano ordeaceo, e terminano ai lati della superficie interna; interponendo due sinuosità insieme con i suddetti, in cui si manifestano molte aperture, che sono gli estremi dei canali che portano il muco separato nei follicoli glandulosi.

g. g. Rilievi più estesi in larghezza dei precedenti che venendo dalle parti laterali della base del grano ordeaceo vanno a congiungersi coi precedenti, e con essi terminano insensibilmente sulle parti laterali della superficie interna. Fra il grano ordeaceo, e il principio dei rilievi *f. g.*, e la loro congiunzione si vedono due sinuosità occupate dai canali delle prostate, che quivi s' aprono nel canale dell' uretra.

TAV. II.

Fig. 1.

Questa figura mostra l' utero, la vagina, la vescica, la verga maschile colle sue respettive parti vedute dalla faccia posteriore, e superiore.

A. A. La vagina.

B. Il corno destro dell' utero.

C. Il sinistro.

D. D. Il loro ristringimento, e termine nelle trombe di Fallopio.

a. a. La tromba destra, che forma molte circonvoluzioni, e termina all' apertura *b.* circondata dalle sue frange, per cui l' utero comunica colla cavità del basso ventre.

b. Porzione della tromba sinistra con la sua apertura.

c. c. Infossamento fra i due corni dell' utero più marcato dalla parte posteriore.

d. Duplicatura del peritoneo che lega i due corni.

e. e. e. Il peritoneo tagliato.

f. Il testicolo sinistro.

g. Un corpo rotondeggiante congiunto all' istesso testicolo per mezzo del peritoneo, e di vasi sanguigni e linfatici che s' assomiglia all' ovaje tanto per il suo esteriore, che per la struttura interna.

h. Il cordone dei vasi spermatici tagliato, le cui arterie sono ripiene di una materia injettata.

i. Porzione dell' epididime.

k. k. Il testicolo destro coperto in gran parte dalla tromba, e dal suo epididime.

l. Il cordone dei vasi spermatici tagliato, e rovesciato sopra l'utero.

m. L' epididime.

n. Il suo capo.

o. La coda, da cui parte il vaso deferente.

p. La vescichetta seminale del lato destro.

E. La vescica.

r. L' uraco tagliato.

s. s. Gli ureteri tagliati.

t. L' uretra fino alla sua unione colla vagina.

u. Luogo dell' unione della vagina coll' uretra, ove si contengono i canali dei vasi spermatici, e il canaletto di comunicazione dell' interno della vagina coll' uretra.

w. Le prostate.

F. F. Il membro genitale voltato a sinistra col suo prepuzio tagliato, veduto dalla parte superiore.

x. Continuazione dell' uretra fasciata dalla sua sostanza muscolare che s' insinua sotto i corpi cavernosi.

y. y. Porzione dei muscoli ischio-cavernosi uniti all' istessa origine dei corpi cavernosi tagliati.

z. z. Nervi che vanno a diramarsi mirabilmente per la verga.

Fig. 2.

La figura seconda mostra porzione del corno sinistro dell'utero con-

con la sua tromba corrispondente, il teſticolo, e quel piccol corpo rotondeggiante, che s' assomiglia all' ovaja.

A. A. Porzione del corno siniſtro dell' utero che colla sua eſtremità riſtretta termina nella tromba.

a. a. La tromba di Fallopio che al suo eſtremo mostra le frangie, che circondano l' apertura di comunicazione colla cavità del bassòventre.

c. Il testicolo spogliato delle sue membrane.

d. Un corpo, che s'assomiglia all'ovaja, che era unito al testicolo solamente per mezzo del peritoneo, e di vasi.

e, e. Membrana del peritoneo tagliata, che riuniva il suddetto corpo al testicolo.

f. f. L' epididime.

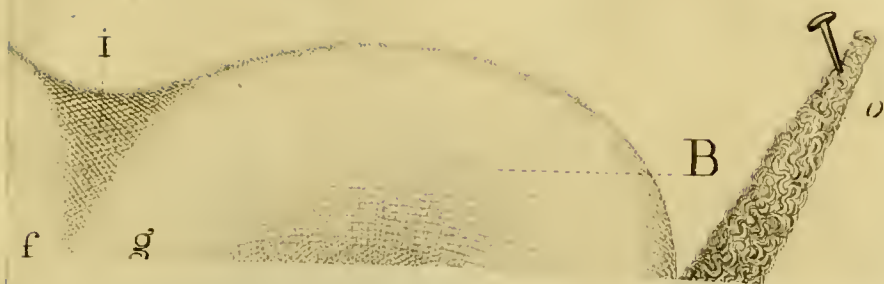
g. Il suo capo formato dai coni, che col loro apice derivano dal testicolo, con tanti canaletti, che sortono fuori del medesimo, ed ammassati ed attortigliati costituiscono il corpo e la base degl' istessi coni, si riuniscono poscia in un solo canale, che avvolto in varia maniera va a formare tutto l' epididime fino alla sua coda, da cui deriva.

h. Il vaso deferente.

Fig. 3.

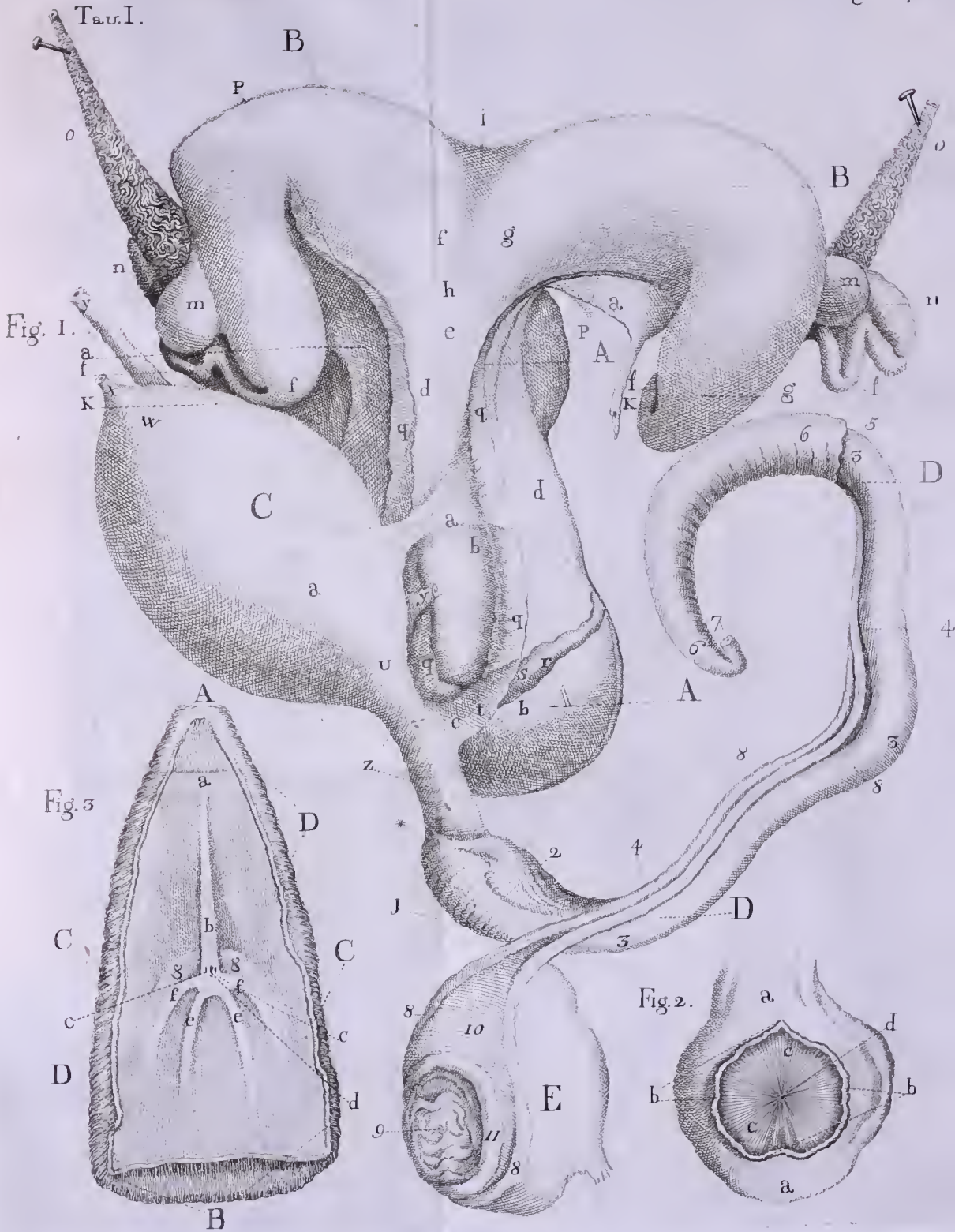
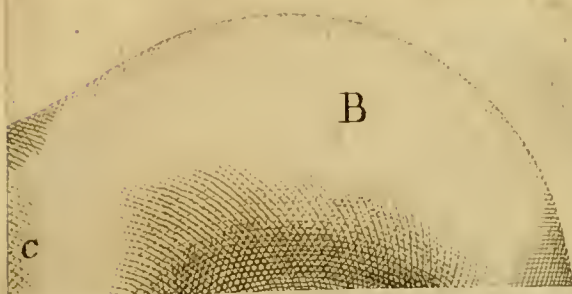
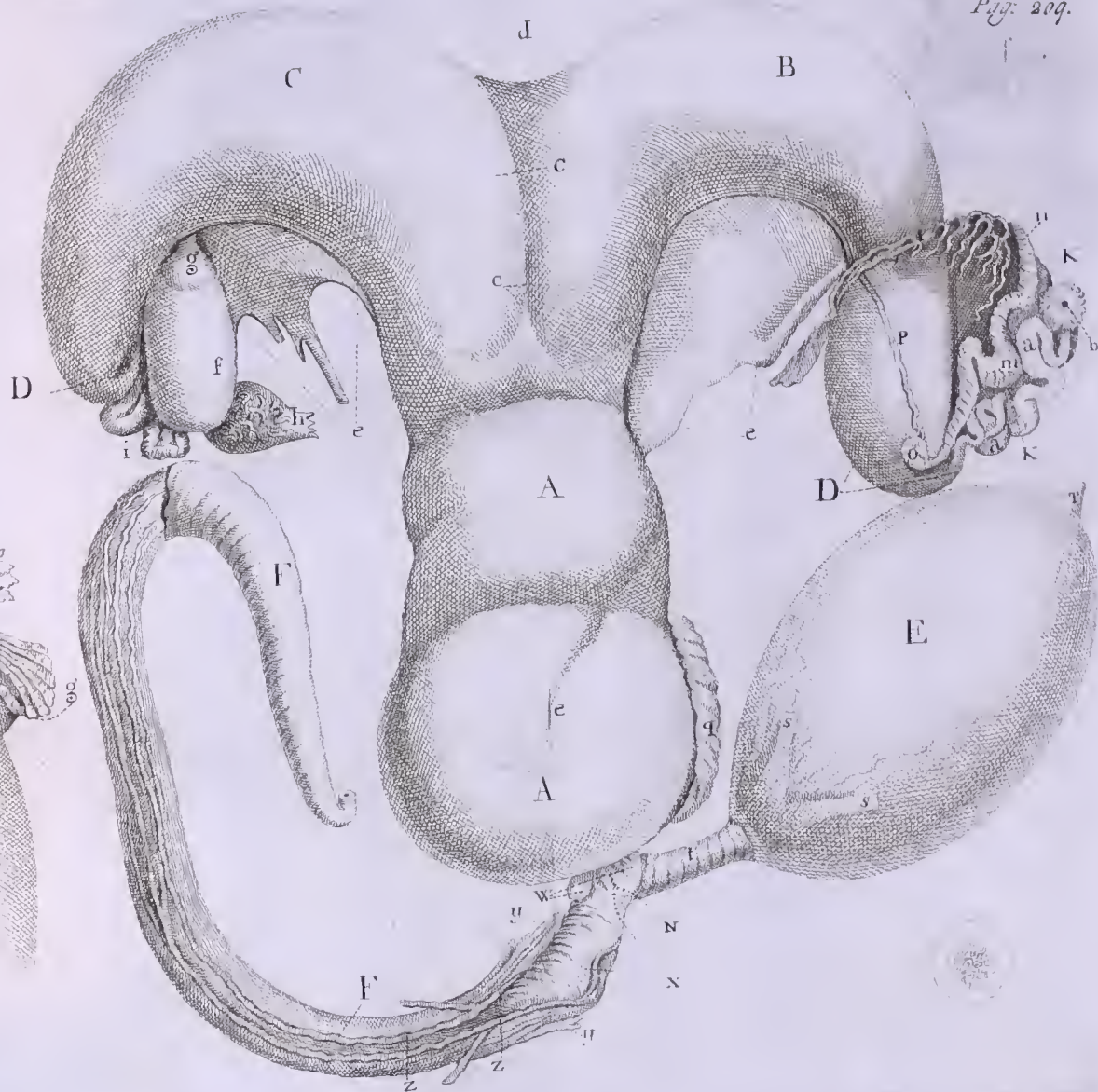
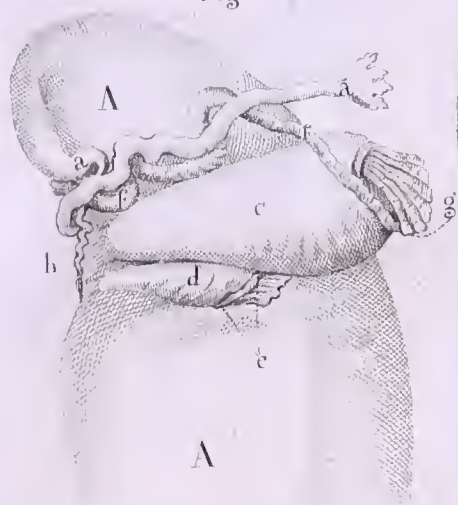
La figura terza rappresenta uno dei corpi, che occupavano lo scroto.

a. Sinuosità che vi si osserva.

b. Cordone formato da un ammasso di vasi sanguigni, e linfatici; che passano per la sinuosità, e si distribuiscono nella sostanza di questo corpo. La sua somiglianza coll'ovaje mi fa credere che fossero le ovaje che occupassero lo scroto.

ME-

de quanto si voglia, abbia compresi nell' esterno calice quanti garofani possa avere col loro calice particolare, è raro, che nel pic-

Tav. I.
Fig. I.
Fig. 3
Fig. 2.
A
B
C
D
E

Tau. II.
Fig. 3.
Fig. 2.
A
B
C
D
E
F

MEMORIA

Sopra la fecondazione dei fiori doppj

DEL SIG. DOTT. ANTON-MARIA FINESCHI.

LEggendo io per piacere nell' ore d' ozio l' *Opuscolo* del Linneo intitolato *Sponsalia Plantarum*, vi lessi alcuni paragrafi riguardanti i semi dei fiori doppj, i quali mi fecero sovvenire di ciò, che mi era accaduto nella mia più florida gioventù, quando, non iniziato nei forensi studj, poteva attendere alla cultura di tali fiori.

Volli confrontare le mie esperienze con quanto dice il lodato Autore, e viddi, che quei paragrafi, che ho accennati, meritavano qualche spiegazione, la quale e poteva non dispiacere a chi riguarda i fiori con occhio fisico, e piacere moltissimo a chi li coltiva pelle signore.

Mi determinai perciò di fare, dirò così, un comento a tali paragrafi, e presentarvelo, conforme faccio, Accademici virtuosissimi, e sottoporlo in ogni parte alle vostre savissime reflessioni.

„ Flores luxuriantes, (così dice il lodato Autore al §.36) sunt, „ cum plurima petala justo florem occupant, suntque vel *Pleni*, „ ubi loco omnium staminum petala enascuntur: vel *Multiplicati*; „ cum stamina nonnulla exulant, nonnulla vero manent: vel *Proli-* „ *feri* cum pistillum in alium excrescit florem cum suo pedunculo „.

Ed al §. 37 „ Omnes flores luxuriantes merito inter monstra „ collocamus, cum transmutantur partes essentiales, diversamque „ induunt naturam, & figuram, quod haud parum admirantur igna- „ ri, quibus flores, *pleni*, & *multiplicati* in deliciis sunt „.

Io non intendo di voler fare il correttore ad un Uomo, il di cui nome, e fama saranno sempre immortali; ma siccome nelle cose di fatto si può disconvenire da uno, senza mancarli di quella stima, e di quel rispetto, che li si deve, così non posso convenire con esso in verun modo, che nei di lui fiori *proliferi*, e *pieni* segua la metamorfosi del pistillo, e stamine in petali, perchè osservo, come potrete osservare voi, che se si prenda un garofano, sia grande quanto si voglia, abbia compresi nell' esterno calice quanti garofani possa avere col loro calice particolare, è raro, che nel pic-

piccol garofano, che forma il centro, non vi si trovi il pistillo capace ancora di ricevere le polveri seminali, e fecondare qualche volta i semi, come potrete riscontrare da questo fatto.

Aveva io in un vaso una pianta di un rarissimo garofano di colore tendente al nero, i fiori della quale, se avevano un ora di sole, si potevano dire quasi bruciati. Uno dei fiori si era di già aperto, ed aveva molti accessorj, che lo facevano essere dei più *proliferi*. Aveva il solo pistillo, e mancava affatto delle stamine. Mi era raccomandato a chi custodiva l'orto, giacchè non poteva averlo in mia casa, che non ha comodo, nè di luogo, nè di esposizione, che la mattina dopo levato il sole, me lo togliesse dall'aria aperta, e lo riponesse in un luogo ombroso.

Nè fu levato dal sole, nè io andai per qualchè giorno all'orto, onde trovai i petali tutti bruciati. Ma siccome il pistillo non aveva sofferto nulla, credei di non cogliere il fiore bruciato, per vedere che ne avvenisse. Il fatto fu, che dopo asciuttata la cassula, vi trovai un seme solo granito, ma molto più grosso dell'ordinario, che sementato, dette, a suo tempo, uno dei più bei garofani *proliferi* di colore oscuro, che fossero mai venuti.

Se vi degnate, Accademici Virtuosissimi, di pazientare anche un poco, darò la mia spiegazione di questo fenomeno, del come, cioè, potesse succedere, che un fiore *prolifero*, mancante di stamine, producesse un seme fecondo.

E' facile ancora il conoscere, che la pienezza del fiore non dipende dalla metamorfosi del pistillo, e delle stamine in petali, perchè, se ciò fosse, non si darebbe mai pienezza di fiori, giacchè il pistillo, e le stamine sono di numero molto, e molto inferiori ai petali, che si trovano a centinaja in alcuni dei fiori pieni, sicchè l'abbondanza di tali petali, deve dipendere da tutt'altro, che dalla metamorfosi sopraddetta, siccome da tutt'altro deve dipendere la mancanza e dei pistilli, e delle stamine.

Vi basti per ora di conoscere, che è dubbia molto, se non volete creder falsa, la metamorfosi, come la credo io, giacchè nei fiori *moltiplicati*, chiamati volgarmente da noi *semidoppj*, esistono sempre e stamine e pistilli, sebbene il seme nella massima parte di tali fiori sia sterile, ma ciò, come farò vedere, per accidente, nò per natura, e nei fiori *proliferi* si vede quasi sempre il pistillo, e molto spesso le stamine ancora: sebbene senz'alcun frutto nel modo istesso.

A me pare, che possa dirsi con ragione, che quando nei fiori nostri mancano le parti della generazione, debba attribuirsi o alla mancanza del nutrimento necessario a tali parti, che, succhiato dalla troppa quantità dei petali, impedisca il loro sviluppo ed accrescimento, o dall'occuparsi, dirò così, dalle radici dei petali quello

quello spazio, che averebbe occupato il piſtillo, e le ſtamine, e che non possano perciò venire alla luce, giacchè quando il Linneo non ci porta veruna esperienza, che confermi la di lui asserzione, pare, che si debba ricorrere ad una ragione naturale, piuttoſto che ad una quasi soprannaturale, molto più, quando troviamo combiuata una eccessiva quantità di petali coll' esistenza delle ſtamine, e dei piſtilli.

E' vero, come qualche volta ho osservato con mio sommo piacere, che i piſtilli di fior di limone, pare che sieno soggetti ad una metamorfosi; ma se si veda il fatto con occhio filosofico, si vedrà sparire affatto tal metamorfosi, e vi si troverà un corso regolarissimo della natura.

E' fuori di questione, che i piſtilli hanno la loro epidermide, la loro soſtanza cellulare. Quando hanno fatta quella funzione alla quale sono ſtati deſtinati principalmente dalla natura, si asciuttano, e cadono. Nelle annate, nelle quali non piove in tempo della fioritura dei limoni, si vede spesso, che i piſtilli di qualche fiore, in vece di asciuttarsi, restano verdi, crescono a guisa di tanti cornetti, maturano quando il limone, del quale formano parte indivisibile per natura, ed hanno la ſtessa polpa, la ſtessa scorza.

Queſto non vuol dire esser sottopoſti ad una variazione, ma che l'epidermide, la soſtanza cellulare dei pistilli nel limone, non è diversa nè punto, nè poco da quella del frutto: che il cadere, o non cadere i piſtilli, in tal pianta, dipende da unaca usa meramente eſtrinseca, e non da altro: che non cadendo, mantengono la loro primitiva natura, nonoſtantechè si sieno in principio manifeſtati sotto un diverso aspetto da quello sono effettivamente, e che fanno tutto quel corso naturale, che fa il frutto del quale formano parte.

Dopo queſto seguitiamo il noſtro Autore. „ Hinc nullos flores „ plenos (§. 38) naturales umquam dari, nisi ex simplicibus propa- „ gati sint, prospicere possumus, siquidem nulla dantur monſtra „ naturalia. Flores hi, primum ope nutrimenti copiosissimi exo- „ riuntur „.

Niuna cosa è più vera di queſta. Il solo nutrimento è il segreto per far passare i fiori dallo ſtato di scempio a quello di doppio. Le fasi lunari nel seminare, per queſto oggetto, son tutte fole. Mille esperienze ho fatte, ed ho veduto, che con buon seme, e buona terra, si hanno dei fiori doppj, con cattivo seme e cattiva terra si hanno scempj. Giova anche molto nutrire il seme con robe grasse, prima di spargerlo in buona terra, che vuol dir nutrimento nel modo iſtesso.

Il molto nutrimento fa sprigionare nei semi, come lo fa al grano, più germi, e queſta è la vera cagione della doppiezza, e no la luna.

 Deb-

Debbo per altro confessare, che con tutte le diligenze usate non sono mai arrivato ad avere un fiore neppure semidoppio dai semi dei monopetali, forse perchè il noſtro non è clima adattato per tale oggetto, giacchè, se esiſtono i fiori doppj di questa specje, è necessario dire, che son venuti dal seme, e no dalla natura, che non li vuole, ma li ama scempj.

Fra quanti fiori per altro, portati dal campo al giardino, corrispondono il meglio possibile ai voti del Giardiniere, il Ciano occupa con sicurezza il primo poſto. Giace esso disprezzato pei campi, sempre uguale a se ſtesso, sempre scempio, e sempre uniforme nel colore, rinasca al campo quanto si vuole. Portatene una pianticina nel giardino, governatela, cuſtoditela. Troncate subito tutti i fiori, che getta, alla riserva di tre o quattro per dare il seme, e vedrete, che nascono da queſto fiori non solo tutti doppissimi, ma di colori assai varj ancora, fino ad averne di quelli di mezze tinte, che son bellissimi.

Se si cuſtodiscano, se s'ingrassino quelle piante, dalle quali si vogliono avere i semi; se s'impedisca di darne troppi, si hanno dei fiori doppj ancora dalle altre specie di fiori, purchè non si trascuri di spargere il seme in terra buona, e di ajutare con ingrassi il seme a sviluppare più germi nel tempo iſtesso.

Ma veniamo, finalménte al più bello. „ Cum flores hi ſtaminibus deſtituantur, (segue ai §§. 39 e 40) privantur etiam organis genitalibus masculinis, ſtigmata fœcundantibus: nulla vero semina ante fæcundationem progerminare possunt. Ergo hi flores, seminibus careant necesse eſt. Eadem de proliferis omnibus argumentandi methodus valet, ex. gr. Ranunculus, Rosa, Geum; omnes enim ſteriles fiunt, quia abeſt germen, & caſtrati sunt a parte fæmina, modo e centro sint proliferi. At horum proles interdum fructus profert, si flos tantum prolis plenus non sit „.

Reſtringendo in poco queſto discorso, pare che voglia dire, che dai fiori proliferi non possa aversi seme, sennonchè nel caso, che abbiano pochi petali. Io poi, all'oppoſto, soſtengo, che si possa da tutti i moſtri aver seme, purchè appariscano le parti genitali perfette, e se si voglia, il piſtillo solo, non difettoso.

Per provarlo, ritorno agli anni della mia prima gioventù. Ignorava affatto le parti dei fiori, non aveva altre cognizioni che quelle, che aveva attinte da qualche pessimo Manuale pei Giardinieri, che dava tutto alla luna. Voleva dei fiori doppj, e li aveva scempj. Acquiſtato in seguito qualche lume, non poteva capacitarmi, che certi moſtri che avevano le parti tutte della generazione, non mi dovessero dare dei semi capaci di dare il fiore.

Dopo varj caſtelli in aria sospettai, che la troppa quantità dei petali potesse togliere agli embrioni dei semi già fecondati quell'alimento,

mento, di cui abbisognano, per potersi ridurre allo ſtato di perfezione, giacchè vedeva, che la natura quattro, o cinque petali al più dava a quei fiori, il seme dei quali nasceva perfettamente, e così credei, che questa sola fosse la cagione dell'imperfezione dei semi, quando esistevano i piſtilli, le ſtamine colle loro polveri seminali, e vi era dentro le cassule una polverina, che non dava luogo a dubitare, che fossero i semi reſtati senza alimento.

Scelsi perciò certi garofani, e certi *Oculus Chriſti* molto doppj, che, negli anni precedenti, non mi avevano mai dato seme, ma che moſtravano e le stamine, e i piſtilli. Comparsi appena i petali fuori del calice, li levai quasi tutti, tirandoli ad uno ad uno colle mani, finchè non fossero ridotti a tre o quattro, e levai ancora molti fiori, perchè i superſtiti potessero alimentarsi copiosamente.

Vi vuol poco ad immaginarsi la mia impazienza. Pigliava spesso una cassula per esaminarla, e vedeva crescervi i semi come nelle altre di fiore scempio. Finalmente ebbi dei semi molto più belli di quelli dei fiori scempj.

Per fare il confronto degli effetti degli uni, e degli altri composi una terra, parte di terra d'orto, parte di terriccio, n'empii diversi vasi, ed in alcuni vi misi i semi di una qualità, in alcuni altri dell'altra, li cuſtodii tutti nel modo iſtesso, nacquero molte piante.

Le trapiantai in seguito nelle ſtesse bragi: ebbero tutte il medesimo trattamento, e nell'anno dopo fu eſtrema la mia sorpresa in vedere, che fra i fiori nati dal seme di fiore scempio, vi era di doppio e di semidoppio quella ſtessa porzione, appresso a poco, che vi era ſtata negli anni scorsi, quando in quelli nati dal seme dai fiori doppj (intendo i proliferi in queſta classe) non ve n'era uno che non fosse doppio, e molti dei doppissimi ridotti a quello ſtato che il Linneo chiama *pieni*.

Mi parve perciò di poter concludere, che la ſterilità degli anni precedenti, dipendeva solo dalla quantità dei petali, che levavano il nutrimento ai predetti semi, e che queſta ſtrana moſtruosità nei novelli fiori, dipendeva, perchè, avendo la pianta di fiore doppio tanta più forza di quelle di fiore scempio, perchè deve alimentare tanti più individui, tutto quel nutrimento, che sarebbe servito ai petali, se sussistevano, era passato in alimento dei semi, i quali avevano perciò sprigionati più germi nel tempo istesso.

Voi vedete subito la ragione, pella quale quel garofano moſtruoso quasi nero, del quale sopra ho parlato, potè tirare un seme a perfezione. Il sole col bruciare i petali aveva fatte le veci della pelatura; ed il seme aveva potuto alimentarsi, e perfezionarsi. Le polveri poi seminali dei molti garofani che erano dentro l'orto, l'avevano potuto fecondare, sebbene nel fiore istesso mancassero le stamine.

 Con-

Contentissimo della scoperta, condussi a vedere questo spettacolo il Sig. Domenico Niccoletti, soggetto a Voi troppo noto, e pella sua abilità nelle Chimiche, e pella sua smoderata passione pei fiori belli, passione, che ci ha tolto troppo immaturamente uno dei più onesti, e dei più utili cittadini.

Non fu possibile da principio d' indurlo a credere, che tali fiori fossero parti di semi da me raccolti, ma finalmente, messolo a parte della scoperta, ci s' indusse non solo, ma volle repetere l' esperienza nei Ranucoli, fiori per esso i più prediletti, e che faceva venire d' Arlem, con un dispendio niente mediocre.

Un caso, che li si dette, li rendè accettissima la scoperta. Aveva esso un Ranucolo venuto dal detto luogo, col nome di Sultana, coi petali del tutto bianchi, ma che avevano in mezzo una corona d' altri petali del tutto verdi, rotondi appunto come le foglie del pino, lunghi mezzo pollice, scherzo della natura, che rendeva il fiore accettissimo alle Signore.

Fra i fiori che ebbe la prima volta dal seme dei Ranucoli pelati, vi fu una Sultana in tutto eguale a quella venuta d'Arlem, ma per una circostanza, molto più bella, perchè la nata al Sig. Niccoletti, in vece di avere i petali bianchi, li aveva di colore di rosa pallida, come li ha presentemente, che trovasi nel dominio di un ottimo mio Padrone, che ne fece acquisto dopo la morte del Niccoletti.

Il resto era parte doppio, ma in pochissima quantità, parte scempio, e ciò nella massima, e pochi erano semidoppj, ma i doppj ancora erano di petali grossolani, e colori smorti, come sempre nel seguito li son venuti, sicuramente perchè questo non è clima adattato allo sviluppo dei semi di tali fiori.

Estesi la mia scoperta ad altre specie, sempre con esito il più felice, ed il difetto solito di non essere mai contenti di quello abbiamo, mi fece venir voglia di avere dei gelsomini, e dei mocherini di fiore doppio. Mille mezzi, tutti equivalenti ai sogni, mi vennero pella mente, ma conosceva da per me stesso, che eran tali.

Aveva un mocherino giallo odorosissimo, che ho ancora. Da alcuni calici di fiori caduti, vidi spuntare delle verdi pallottoline. Siccome non capiva che cosa fossero, mi misi ad osservarne il progresso con attenzione. Nel crescere, pigliarono una figura quasi di borsa, ed un colore biancastro trasparente, ma si vedeva nel mezzo un poco di nero. Ne aprii una, di quattro, o cinque che erano, e la trovai ripiena di una materia bianca mucillagginosa, in mezzo alla quale vi era una nera pallottolina, che credei fosse il seme, ma siccome non sapeva quale potesse essere il punto della maturità, lasciai operare alla natura, sperando potesse darmi qualche indizio.

Venuto il tempo di riporre i vasi per il diacciato, riposi anche

che questo, e le vescichette si mantennero sempre gonfie per tutto il verno. A primavera le staccai dalla pianta e le seminai, e ne nacque una, che mi fu buttata via da una donna nel levare l' erba dai vasi, credendola erbaccia ancor quella, ne fu possibile di trovarla.

Non tutti gli anni si producono tali vescichette. In quest' anno in tre mocherini ne ho trovata una sola che vi presento. Ne aveva nell'anno scorso altra pianta nata dal seme, che era prossima a dare il fiore, ma nella disgrazia accaduta dell' incendio della casa del Sig. Giuseppe Pieri, nella quale era tal pianta, o fu portata via, o sotterrata, senza che si sapesse cosa ne fosse. Questa piccola pianta che voi vedete, è parto di un seme dato al terreno nel Marzo dell' anno 1797.

Non credo difficile potere avere dei mocherini, e dei gelsomini di fiore doppio per mezzo del seme, giacchè è certissimo che quelle pallottoline bianche che spesso si vedono nei calici dei gelsomini, contengono il seme per lo più sterile, ma qualche volta fecondo, come ho provato, ma la mancanza di comodo in casa, l' ignoranza di chi presiedeva all'orto, che mi guastava tutte le mie operazioni, il piacere che pigliai alla campagna, mi fecero lasciare i fiori doppj per pensare al grano, ed alle viti.

Non sono per altro stato mai avaro di queste scoperte. Le ho diverse volte comunicate a diversi amici, ed anni sono le consegnai anche scritte al meritissimo Sig. Direttore Camillo Rossi, che le mandò a Firenze.

Se avete piacere, Accademici Virtuosissimi, di divertirvi coi fiori, fra il campo che vi ho aperto, e la mescolanza delle polveri seminali fra i fiori analoghi, potrete fare scherzare la natura quanto vorrete.

Finirò col dirvi, che se qualche volta non vi riesce quello che voi tentate, non ne tiriate la conseguenza, che il fatto non sia vero. Tante cagioni che vi sono occulte, possono opporsi all' esito. Nei mostri non sempre le stamine hanno le polveri seminali, e perciò non sempre riesce di avere semi. Si abbia pazienza, si osservi, e l' intento si otterrà con sicurezza. Nelle esperienze, si sa che una piccola circostanza fa variare aspetto alla cosa, e che bisogna repeter talvolta più fiate la cosa istessa.

ME-

MEMORIA

Sopra il Ragno rosso dell'Agro Volterrano (1)

DEL SIG. DOTTORE

FRANCESCO MARMOCCHI.

FRa i molti e varii insetti, de' quali è stato ferace l' Agro Volterrano nel corrente anno 1786, uno fra gli altri è degnissimo di osservazione; e questo si è un Ragno chiamato dagli Agricoltori per la sua figura *il Ragno tondo*, ed in seguito per i suoi meglio esplorati caratteri *il Ragno rosso*.

Alle spogliamento fatto dai bruchi, chiamati *Eruca Bombix*, delle tenere foglie degli alberi nella primavera, ed alla destruzione dell' erbe cagionata da una prodigiosa quantità di grilli, mancava, per così dire, un'altro insetto che insidiasse alla vita e salute degli Agricoltori, come fu ed è il Ragno rosso, di cui son per descrivere la figura, le proprietà, il veleno, e la cura del di lui morso.

L' inverno che, fuori del suo principio, fu sempre tepido; la primavera che più dell' ordinario fu calda, cooperarono queste due sta-

(1) Quantunque nel Tomo VII. di questi Atti sia stata inserita una Memoria del Sig. Dottor Toti, ove si dà una dettagliata descrizione del ragno Volterrano del 1786 e seguenti, e degli effetti e cura del suo morso; pure vi è creduto dovere dar luogo ancora a questo Opuscolo, che dall'Autore si asserisce presentato a S. A. R. Pietro Leopoldo Granduca di Toscana di gloriosa memoria nel mese di Luglio 1786 e fin d'allora fatto girare per le mani di varj suoi Amici, e che fu poi da esso inviato all'Accademia nell'Agosto 1794, cioè dopo la pubblicazione del predetto Tomo; perchè i due Autori sono alquanto discordi nella descrizione dell' insetto, e intorno alla sua novità, origine, ec. Si è però tralasciata l' introduzione e le note aggiuntevi dallo stesso Autore, nelle quali egli reclama l' anteriorità delle sue osservazioni ed il titolo di *primo scuopritore*, *osservatore*, e *relatore* del ragno, e si oppone ad alcune particolari opinioni del Sig. Toti; giacchè si è osservato non contenervisi alcuna nuova osservazione atta a meglio schiarire il soggetto. Una elegante descrizione di questo insetto si trova nell' insigne Opera del Chiariss. Sig. Prof. Rossi, che ha per titolo *Fauna Hetrusca Liburni* 1790 Tom. II. pag. 136-137, che in parte può servire a comporre le differenze.

ſtagioni e contribuirono certamente al più grande e sollecito sviluppo dei riferiti insetti egualmente che dei Ragni rossi, de' quali abbondantemente è sparsa e fiorita la Campagna Volterrana per quella parte che guarda il mezzo giorno ed il ponente.

Per quanta diligenza io abbia usato per ritrovare in alcuno fra gli antichi e moderni Naturaliſti più classici la descrizione del noſtro ragno e del suo veleno, non mi è parso che alcuno finora l'abbia descritto: e solo il Linnéo una, fra le tante specie di ragno, descrive al N. 2 della Classe 68, alquanto analoga alla nostra specie colle seguenti parole: *Aranea abdomine globoso, reticulato, supra purpurascente, fusco nebuloso. Habitat in hortis.* Ma salva l'analogia quanto poco convenga al noſtro ragno una tal descrizione vedrassi in progresso di queſta Iſtoria.

Intanto è da notarsi che fra i più vecchi Coloni dell'Agro Volterrano non v'è uno che abbia nè un' idea chiara di queſto ragno e del suo veleno, nè la memoria di una prodigiosa moltiplicazione del medesimo, come si è veduta da tutti in quest'anno.

Due soli, e queſti i più anziani fra i Professori dell'Arte Medica, si ricordano ed asseriscono di aver curato nell'anno 1767 una Contadina che era ſtata morsicata da un ragno, e che abitava in un podere poſto al mezzogiorno della città; che gli effetti del morso furon gl' iſtessi, o poco varianti dai moderni del ragno rosso, e simile l'antica alla presente sudorifera cura: ma che poi non si rammentano bene se il ragno venefico del 1767 *fosse realmente il ragno rosso o altro ragno*; solo che *allora non si vidde di quei ragni la moltiplicazione e quantità prodigiosa come in quest' anno*.

La naturale e prodigiosa fecondità dell' insetto, in virtù della quale egli è capace, non oſtante qualunque causa fisica diſtruggitrice di lui medesimo, a riprodursi in brevissimo corso di lune, (purchè dal freddo o da altre a lui micidiali meteore rimanga preservato ed illeso un solo bozzolino con entro i suoi germi); la varia denominazione data dai contadini all' insetto al primo suo comparire in quell'Agro; la facilità e la loro incautela nel farsi mordere; la maraviglia, anzi lo ſtupore in essi eccitato alla viſta degli spaventosi effetti del suo veleno; la diversità di sentimenti fra loro, e le loro iſtesse tradizioni contradittorie; l'asserzione di chi l'aveva viſto altre volte, ma più piccolo e tutto rosso; d' un' altro che egli era di più colori ed abitava sugli ulivi, e non in terra: tante finalmente e sì varie deposizioni, e le manifeſte contradizioni dei contadini da me esaminati, unite alle sopraddette riflessioni della fecondità, della varia denominazione dell' insetto, e della novità del suo veleno, e al silenzio della medica tradizione e dei dotti Medici antecessori; e finalmente l' accidente occorso nell' anno 1782 e sul principio del 1783 mi fanno sospettare, anzi credere, che

che il ragno sia un nuovo insetto, e non indigeno di quest' Agro.

La raccolta nel 1782 fu così scarsa, che le poche biade raccolte non servirono per la futura sementa, non che per somministrare il vitto ai contadini. Fu necessario pertanto ricorrere al Porto di Livorno, dove, alla voce d' una scarsa raccolta in Toscana, era approdata una gran quantità d' ogni genere frumentario specialmente dalle vicine Sicilie e dall' Affrica: Fatto di cui io fui testimone oculare, e che sarà riscontrabile anche dopo una lunga serie d'anni.

Congetturando adunque io penso che fra i generi frumentarj provvisti a Livorno per uso della macina e della sementa, fosse mescolato uno o più bozzoli del ragno rosso, che a centinaja contengono i ragnolini; e che questi gettati assieme col seme sul campo si sprigionassero col favore della stagione dal guscio, e crescendo si spargessero per la campagna, dove appoco appoco per la loro prodigiosa fecondità moltiplicandosi, abbian fatto oggidì col loro esorbitante numero il timore dei campagnuoli, e lo stupore degli Osservatori Naturalisti.

„ Non altrimenti stupido si turba
„ Lo Montanaro, e rimirando ammuta
„ Quando rozzo e salvatico s' inurba.

Dant. Purg. Cant. 26.

Vaglia per altro il testè da me detto per una mera semplicissima congettura, e resti pure nella sua oscurità l'origine e la provenienza di questo insetto, essendo quello io fra gli altri che amano con Cicerone piuttosto *propriam fateri ignorantiam quam absurda sentire*. E se mai realizzar si potesse la congettura, egli è certo che il tempo necessario a tanta moltiplicazione ed aumento non è stato di men che di tre anni, mentre nell' anno scorso 1785, asseriscono i contadini d'aver veduto per la Campagna qualche *ragno tondo*.

Detto quello che io ho creduto di dover dire sulla probabilissima novità di questo insetto, passo a descriverne la figura, la quale è quasi perfettamente sferica; la grossezza n' è come d' un' ordinaria nocciuola; il colore è nero; la cute villosa e sparsa di tredici macchie rosse ripartite longitudinalmente, e parallelamente distanti fra loro, a quattro per quattro sul dorso, con un'altra inferiormente posta fra le sue gambe: il ragno tutto infine è monogastrio e univentre.

Le macchie son muscolari, ed ora son più, or meno cospicue, secondo che si dilatano alla luce del giorno, e si ristringono alle tenebre della notte „ o si rendono poco men che invisibili quando il „ ragno cessa d'esser fecondo, o per la fame si disuga, e rimpic-

„ colisce

,, colisce in modo colà nella metà di autunno, da non sembrar più
,, lo ſtesso (1).

Le gambe son' otto, e di tre articoli ognuna. Ha sulla teſta, sporgente alquanto in fuori dal suo globoso addome, due antenne corte ed articolate, sotto delle quali pare che vi siano gli occhi, e due branche, che copriranno facilmente la bocca. Abita per gli aperti campi or sotto una zolla, or sotto un sasso, ed ora sotto i gruppi delle radiche dei suffrutici e sotto i manipoli delle mietute biade, quando ne sono spogliati i campi: ma prima di spogliarneli ama di ſtare sullo ſtelo delle spighe, per poter più facilmente vedere svolazzare gl' insetti, di cui si pasce.

Di rado si trova accompagnato con un suo simile, ma sembra che ami la solitudine.

Forma dei bozzoli di lucida seta ,, fino al numero di sei ,, dentro i quali, non viſto e sempre all' oscuro, deposita le sue uova, che sono del colore del fior di pesco, e non dissimili nella lor forma e grandezza dal seme dei noſtri filugelli ,, e nel numero so-
,, no in queſto bozzolo più, nell'altro meno, secondo che sono i boz-
,, zoli de' primi o degli ultimi, contandosene nei primi ora 350, ora
,, più, e negli ultimi sempre circa a 200 ,,. Io ho veduto il seme nato diciassette giorni dopo che io ho acquiſtato dei bozzoli, ma non saprei dire da quanti giorni avanti era formato il bozzolo. Queſta osservazione va fatta in progresso, ma si può credere che, egualmente che l' uova degli altri insetti eſtivi, nascano preſto l'uova ancora del ragno rosso. Qualunque per altro sia queſto tempo deſtinato dalla natura al nascimento de' ragni rossi, e per quanto poco importante sia per essere una tale osservazione, certo si è che i nati ragnolini ſtanziano e non escono mai dal loro bozzolo, ove forse ſtaranno fino alla prossima primavera.

Io non posso per ora nulla di certo asserire sopra del sesso di queſto ragno, e perchè in qualunque luogo ho raccolto dei ragni, vi trovai sempre quando uno e quando più bozzoli; e perchè è cosa notissima che tanto più facilmente si trovano i veri Ermafroditi fra gl' insetti e le piante, quanto è più difficile e quasi impossibile il ritrovarne fra gli uomini, fra i quadrupedi ed i volatili.

Nemmen qualche cosa di certo io posso dire dell' interna ſtruttura del ragno, pensando ch' egli averà, come gli altri insetti de' vasi e de' visceri particolarmente coſtruiti dalla natura a far le necessarie funzioni della digeſtione e della circolazione, e che non

(1) Le osservazioni segnate in queſta relazione colle virgolette mancano in quella presentata a Firenze, perchè son nate negli anni consecutivi al 1786, e si aggiungono a maggiore schiarimento dei fatti.

evendo il nostro ragno un torace per il polmone, respirerà per la cute, come tanti altri insetti apteri ed alati; poichè dall' apertura del globoso suo ventre, altro non apparisce che uno stomachevole ammasso di materia bianchiccia e rossastra.

Si pasce il ragno rosso di mosche, grilli, e di piccoli scarabei, i quali incappano nei fili di seta da lui tesi a non brevi distanze dal suo covile, ed intersecati fra loro ad angoli di qualunque specie, e formanti un' irregolarissima rete. Ha questo di particolare la sua maniera di cacciare ai grilli ed agli altri insetti volanti, che il ragno tostochè ha abbrancato la preda, prima di ucciderla, tanto volge e ravvolge di seta attorno il loro corpo, che loro lega strettamente le ali, indi nelle parti più vitali e più molli li punge, e questi allora convulsi si muojono, lasciandone egli il cadavere, o sulla rete o sul terreno, ove resta come un segno indicativo che quivi il ragno è vicino.

Si batte con i ragni suoi simili, ed all'aperta campagna, e serrato in vasi di vetro, ed è nemico giurato di un altro ragno indigeno di quest'agro, che dal suo dorato colore i contadini chiamano *il ragno d'oro*. Ciò è conforme a quanto scrisse Monsieur de Bonnet sulla curiosa storia degli altri ragni e dei loro amorosi congressi, i quali sempre costan loro la perdita di qualche gamba, e consecutivamente la morte.

Egli è pronto all'ira e velocissimo al moto, e geloso all'estremo de' suoi bozzoli, che mette e difende fra' suoi artigli tosto che egli è stato scoperto. Ha il tatto così molle, che arriva salendo alle parti più nascoste e delicate dei mietitori senza esser sentito.

Morde, ed i suoi morsi o punture, appena dissimili da quelle di una pulce o di una mosca, eccitano istantaneamente degli acerbi dolori in ambedue l'estremità ed ai reni, cagionando alle gambe un moto irregolare chiamato *Scelotirbe*, e volgarmente paralisia imperfetta, per cui i morsicati non possono reggersi in piedi, e van di continuo lamentandosi come d' uno che lor sega or le gambe, or le coscie, or le braccia ed i reni.

L' universale convulsione, la soppressione d' orina, il priapismo, le gonfiezze e dolori del basso ventre, i vomiti, il deliquio passaggiero, ed il continuo involontario dibattimento di tutta la macchina, sono i sintomi e le ordinarie conseguenze di questo veleno.

In tanta costernazione delle membra e generale attacco de' nervi, appena si altera il polso, e pare che si riconcentri: quindi urlano di continuo i miseri, e provano tutte le difficoltà a respirare all'aria chiusa. Da ciò sembra che questo ragno sia stato munito dalla natura di un pungiglione, o proboscide, per mezzo della quale punga e nell' istesso tempo stilli nella puntura un sottilissimo e volatilissimo umore venefico, che in un momento si assorbisce

dai

dai vasi bibuli linfatici o sanguigni, e si riporta a tutto il sistema nervoso,

La natura indica bastantemente e chiaramente che il sudore copioso provocato co' salassi, per mezzo d'una febbre naturale o fattizia, a forma dell' aforismo Ippocratico = Convulsioni febris superveniens, bonum = o colla Teriaca sciolta nel vino generoso, o colla Canfora maritata al Nitro, o colle strofinazioni n' è il vero rimedio. Come al contrario sono stati superflui ed insufficienti i medicamenti topici applicati alla parte offesa, perchè la somma volatilità del veleno non dà tempo di adoperarli utilmente; onde ho trovato inutili le coppe a vento e scarificate, anche molto più di quello che credesi, perchè per l' inquietudine e continuo moto del corpo del morsicato riesce molto difficile ad applicarle al luogo della puntura, ove altro non si vede che un punto rossigno tendente al livido. Nessuno dei morsicati fino a questo giorno (28 di Luglio 1786), è morto, quantunque il loro numero sia stato sin'ora di trenta in circa fra quegli che sono stati da me curati in questo Spedale, e quelli che sono stati curati dagli altri Professori alla Campagna. Non si sa parimente finora che alcuno degli animali che pascono colla bocca per terra sia stato morso ed ucciso dal ragno rosso.

RAGGUAGLIO

Di alcune produzioni naturali dell' Agro Sanese scritto ad un Amico

DAL SIG. DOTTORE

BIAGIO BARTALINI

PUBBLICO PROFESSORE DI STORIA NATURALE CHIMICA E BOTTANICA.

Eccomi, amico carissimo, a ragguagliarvi di quanto ho osservato nel mio breve viaggio. Più volte si è parlato dei cangiamenti accaduti nel noſtro globo, e più d' ogni altro l'abbiamo attribuito agli ardenti, ed agli eſtinti Vulcani.

Per vero dire le diligenti ricerche dei più moderni Naturaliſti hanno poſto in chiaro un tal fatto, poichè molti tratti di paese altro non sono, che un' ammasso di rigetti vulcanici, come dimoſtrano le lave, le pomici, le vetrificazioni disseminate in varj luoghi. Guettard ne notò degli eſtinti nel Regno di Francia. Il Sig. Amilton quando parla dei Campi Flegrei ci assicura, che da Pozzuolo in vicinanza di Napoli sino a Radicofani si trovano da per tutto veſtigj di vulcani di già eſtinti. Il Dott. Feſtari scuoprì pure nei monti del Vicentino chiarissimi contrassegni di tal fenomeno, ed il Sig. de Saussurre trovò sempre produzioni vulcaniche da Napoli sino a Civita Caſtellana, come si esprime in una lettera scritta al Cav. Amilton, che averete riscontrata nel XIX. Volume degli Opuscoli di Milano.

Non vi ſtarò a rammentare il numero grande dei Vulcani attualmente ardenti, o di già eſtinti, che si trovano in Asia, in Affrica, e nell' America per esservi baſtantemente noti, e per essere ſtati minutamente dettagliati dal P. Kirkerio T. I. lib. III. cap. 6, e per ultimo da Faujas de Saint Fond.

Vi dirò soltanto a tal proposito, che più volte ho passeggiata la montagna di S Fiora, e adesso sono passato ad Acquapendente, e Latera, e di là a Sorano, e Pitigliano, e di continuo ho riscontrato dei sicuri veſtigj di tali produzioni vulcaniche. Nel ritorno ho visitato Radicofani, e le sue adjacenze, e dalle osservazioni fatte-

vi

vi mi sono accertato al maggior segno, che quella montagna gettasse un tempo le fiamme.

Non sono però i Vulcani la sola cagione per cui la superficie della terra ha mutato di aspetto. Le sorgenti d'acque minerali, che colle loro tartaree deposizioni hanno in gran parte incroſtata la superficie terreſtre, le acque piovane, che di continuo dilavano, ed aſtergono la medesima, le alluvioni, e cangiamento di direzione dei fiumi hanno a ciò non poco contribuito. A mio credere però una siffatta mutazione è derivata più d'ogni altro da una cagione diversa dalle fin quì accennate; e che io non azzardando di assicurare quale precisamente sia, lascio a voi, che dalle seguenti mie osservazioni lo congetturiate.

Non può negarsi, che nella noſtra Europa si trovano sepolti a varie profondità corpi spettanti al regno animale, e vegetabile non proprj di queſto clima, ma che nascono, e vivono soltanto nell' Asia, nell'Affrica, e nell'America.

M. di Jussieu racconta di prodigiosa quantità d'ossa d'incogniti animali trovate a gran profondità nell' interno del noſtro globo. Il Dott. Giuseppe Monti Bolognese ci dà notizia di una ſterminata mascella trovata nel suo territorio, come leggesi in un suo opuscolo, che ha per titolo: *De monumento diluviano nuper detecto in agro Bononiensi*, per il che ne deduce, che in Italia ancora si trovano dei corpi non proprj nè del clima, nè di queſti mari.

Non tanto i denti, o difese, che dir vogliamo, o sia l'avorio, o lo spodio degli Arabi, ma vertebre, teſte, e scheletri intieri d'Elefante sono ſtati trovati nei più freddi, e rigidi paesi.

Nè la sola Francia è ricca di tali ossamenti, ma la Germania, l'Inghilterra, la Russia, e soprattutti la Siberia, dove per quanto non sia possibile, che nasca, e cresca tal sorta d'animali, sembra nonoſtante dalla quantità delle loro ossa, che ivi si trovano, esser quello un tempo ſtato il loro vero ricettacolo.

Alle osservezioni dei sopracitati Naturaliſti unisco quanto ho trovato di particolare ancor' io nelle noſtre campagne cominciando da una ben grossa, e altrettanto ben conservata Vertebra di Balena del peso di libbre 72 che rinvenni in vicinanza dell' altra trovata dal noſtro amatissimo precettore Dott. Giuseppe Baldassarri, e che nella sua ſtruttura da quella non differisce.

Altre molte ossa petrificate d'incognito animale ho raccolte nelle noſtre crete, ma siccome non mi sembrano tali, che meritino le voſtre osservazioni, perciò non mi fermo a rammentarvele.

Bisogna dunque, che meco conveniate, che il noſtro territorio Toscano è al pari d'altri paesi Europei ripieno d'ossa d'animali ſtranieri, e segnatamente d'Elefanti, ed in particolare il Valdarno di sopra, poichè in riſtretto recinto vi si trova copioso ammasso d'os-

d'ossa elefantine di varie grandezze d'ordinario penetrate dallo spato, o dal quarzo, a cui trovasi unita della sostanza ferrigna, come l' indicano le superbe dendriti, che in esse si riscontrano.

Devo ancor dirvi, che osservai appese sopra una delle porte laterali del Duomo d'Arezzo due bellissime difese elefantine. Due gran femori elefantini gli vidi nella bella raccolta dell' Accademia di Cortona ritrovate, per quello mi fu detto, in quelle adjacenze, e nella nostra antica Chiesa, detta la Madonna di Fontegiusta, vi è appesa una gran scapola egualmente elefantina.

Accordatemi di grazia breve digressione per rammemorarvi, che è comune opinione, che questo eccessivo numero d'ossa fossili elefantine, che si trovano nel Valdarno siano un residuo di quegli Elefanti, che Annibale condusse in Italia. Polibio per altro nelle sue istorie afferma, che Annibale passasse le paludi montato sopra un Elefante, che solo gli era rimasto, o queste paludi fossero in Toscana, come pretendono molti Istorici, oppure tra Modena, e Bologna, conforme pretende provare il Cav. Lorenzo Guazzesi nelle osservazioni istoriche intorno ad alcuni fatti di Annibale.

Non sembra dunque verisimile, che gli Elefanti condotti in Italia dal Capitano Cartaginese morissero tutti nel Valdarno, e che la quantità dei loro ossamenti, che vi si trova, ne siano un avanzo.

Ma tornando al nostro proposito ditemi di grazia; non tenete ancor voi per certo, che molti vegetabili indigeni di paesi oltramontani, e oltremarini si trovino petrificati nelle nostre campagne? Sapete bene, che i Sigg. Luid, e Wodvard fecero su ciò molto onore all'Inghilterra per la scoperta fatta di varie piante straniere impresse in più, e diverse pietre. Quelle trovate da M. Mill in Sassonia delineate in egual sorta di pietra gli furon pure di molta gloria. Lo Scheuzzero ha resa celebre l' Elvezia per il prodigioso numero di vegetabili stranieri, trovati espressi in varie pietre. Il Celebre Ferdinando Bassi non ci annunziò egli pure una pietra, sulla quale vedesi espressa una foglia d' esteri paesi, conosciuta dal Rumfio col nome di *Quercus Molucca*?

Finalmente da M. de Jussieu fu trovata nel Lionese una quantità di piante espresse in varie pietre, ed in più pezzi di carbon fossile, alle quali non fu possibile di trovarne una, che si uniformasse tra quelle indigene di detta regione. Soltanto alcune Usnee, varii Polipodj, Adjanti, Lingue cervine, delle Lonchiti, delle Osmunde si accostavano a quelle, che si hanno dalle Isole dell' America scoperte dal P. Plumier, e Sloane, ed a quelle spedite dall' Indie orientali agl' Inglesi coltivate dal Pluknet in diversi giardini.

Che dirò adesso delle straniere produzioni marine, che tuttora troviamo per le nostre campagne?

E chi

E chi non sà, che la celebre Chiocciola scalata abita nei mari dell' Indie orientali, rimarchevole per l' elegante sua ſtruttura, e per l' eccessivo prezzo con cui si compra dai Naturaliſti Europei. Quello che fa la rarità di queſta conchiglia si è, che gl' Indiani la conservano fra le loro gioje più preziose, secondo che ci racconta Argenville. Eppure nel passare da Quercecchio luogo situato presso la Città di Montalcino ho trovato una Scalata esattamente conservata, ed altre tre furono trovate negli anni addietro dal noſtro precettore Dott. Baldassarri, dal fu Dott. Caluri, e dai Reverendiss. P. . . . . . Olivetano cui appartiene queſto luogo.

Presso Montalcino vi ho trovato molti Palati conosciuti col nome di Bufoniti, che spettano a quel pesce detto il Grondatore, indigeno dei mari del Brasile. Ho meco portato il *murex ramosus* abitatore della Persia, e della Giammaica, il *Turbo terebre* propio dei mari Europei, il *murex tritonis* indigeno dell'Arcipelago, e dell'America, il *Dentalium Elefantinum* che cresesce nei mari Indiani, ed Europei, il *murex colus* abitatore del mare dell' Indie con molti più, che tralascio descrivervi per non andare troppo in lungo. Nelle noſtre crete Sanesi, come alla Coroncina, ed in altro rinomatissimo luogo detto Mont'aperto, non menochè presso la Casa bianca Villaggio dei Sigg. Spannocchi vi ho trovato le ſtesse marine produzioni, menochè la Scalata. Nell' accennatovi ultimo luogo, non sono rari molti buccini ſtranieri come potete rilevare dal Rame num. 1, che vi rimetto (Tav. VI. fig. 1, 2, 3, 4, 5) con la loro crepidula segnata lettera A, e di tali crepidule se ne trovano ancora delle isolate, e conservate esattamente, come potete esaminarle a voſtro bell' agio.

Finalmente per non più tediarvi passo a descrivervi brevemente alcuni prodotti marini non propri di queſto clima, ne di queſti mari, e che io ho trovato presso l'ameno Villaggio del Sig. Cavaliere Flavio Bandini, conosciuto col nome di Fagnano.

Tali produzioni, delle quali vi rimetto per adesso nove Rami esprimenti undici figure diverse, le ho trovate racchiuse, ed impresse tra lamina, e lamina di quella pietra scissile intesa da noi col nome di Galeſtro più, e meno compatto asperso di miche talcose colore d'argento.

Nè m' ingannai quando supposi, che tali soſtanze sarebbero appartenute al regno animale e per la loro figura, e perchè in quel contorno mi si presentavano delle conchiglie marino-fossili. Se passerete per detto luogo vedrete un continuo ammasso di dette pietse, ove rimarcherete tra lamina, e lamina quanto vi ho narrato.

Per quella iſtessa direzione camin facendo presso altro villaggio del Sig. Cav. Cerretani detto Valdipicciola si trova la ſtessa pietra, e le medesime produzioni.

Una

Una congerie di tali prodotti, e la quantità, e varietà loro mi determinarono a farne i ridetti rami, acciò meglio di me ne distinguiate se in Morisone, in Ellis, in Oeder, in Guettard ve ne siano delle consimili. A me sembra, che quelle espresse da Morisone alla Tav. III. sez. 15 fig. 3 pag. 650, e che esso chiama *muscus marinus procumbens caule tenuissimo*, *denticulis biogis* si accostino molto ad alcune delle mandatevi scolpite in rame, come pure l'altra disegnata da Ellis alla Tav. XIX. lettera A, colla differenza però, che non si trovano nella nostra fossile i denti laterali descritti, ed espressi da Morisone, e che io noto al n. 2 (Tav. VI.) fig. 1.

Queste produzioni, come rileverete dagli annessi rami, variano molto nella struttura, e grandezza loro. Una figura, che trovo espressa nel Tom. V. di Guettard Mem. 12 Tav. 3 molto si accosta alle figure da me fatte disegnare nelle Tavole VII. e VIII. num. 3, 4, 5, e 6, fig. 2, 4, 5, e 7, uniformandosi ancora alla pietra in cui si trova espressa.

Gli altri tre rami poi num. 8, 9, e 10 (Tav. IX. e X.) che racchiudono le figure 8, 9, 10, e 11, come pure il rame num. 4 (Tav. VII.) che comprende la fig. 3, siccome non trovo in alcun'Autore che ne abbian fatto menzione, perciò per adesso non mi esterno a dirvene il mio pensiero, ed a quale specie di Polipari possano appartenere.

Non sono molti giorni, che alla distanza di tre miglia fuori della porta Romana, e precisamente in luogo detto i Fuochi facevasi uno scasso non molto profondo in terra meramente argillosa, quando alla mia presenza si sfaldò voluminoso ammasso di detta terra distribuita a lamine, o sfoglie, che dir vogliamo, e tra una, e l'altra lamina osservai elegantissime foglie del genere dei Polipodj, delle Osmunde ec. Mosso da curiosità mi messi a sfaldare minutamente la detta terra, e vi trovai complicati varj Polipari non dissimili ai di già annunziativi, e tutte queste produzioni erano costantemente calcinate, e bianche. Quello che formò il mio maggior piacere si fu il ritrovamento di molti echini calcinati consimili fra loro nella figura, confusamente ammassati con le dette produzioni, e che avendoli confrontati con i riportati da Klein, raffiguro esser simili a quelli disegnati alla Tav. XIII. lettera C. D.

Altre volte vi ho dato notizia, che le crete situate fuori della nostra porta Romana abbondano di produzioni marine, sieno di quelle spettanti agli univalvi, ai bivalvi, ai turbinati, siano delle altre, che passano sotto nome di Ortoceratiti, ed Ammoniti, come pure non rare vi si trovano le crepidule o isolate, o dentro il suo testaceo, come di già vi ho rimesso il disegno in rame.

Vi unisco per ultimo altri due rami n. 11 e 12 (Tav. XI.) ove sono raffigurate alcune produzioni, che io non saprei decidere a quale specie appartengano, e che trovai tre in quattro miglia lon-

tano

tano dai Lagoni di Castelnuovo di Valdicecina per la strada che porta al luogo detto la Selva.

In occasione del mio passaggio da questo luogo mi portò la curiosità ad osservare con qualche attenzione la pietra alberese, che ivi si trova, e rilevai, che alla medesima vi erano mischiati dei granelli, come vedrete n. 11 e 12 (Tav. XI.), fig. 12 e 13 fatte incidere a bella posta.

Tali pezzi di pietra non mi parvero dei comuni, onde deliberai di fermarmi in quel luogo per osservarli più minutamente, ma una dirottissima, e continuata pioggia mi costrinse a partire, e non mi permesse se non di raccorne alcuni pezzi per esaminarli doppo il mio ritorno a Siena conforme ho fatto.

A prima giunta credetti, che fossero le così descritte Ooliti, ma varj granelli, che vi trovo legati da sugo spatoso, e che mi sembrano formati di varie sfoglie, o circoli concentrici sino al numero di tre, o quattro me ne dissuasero; molto più poi, che non di rado si trova racchiuso nel centro dei grani più grossi un globettino molto fragile, che nella sua frattura lascia un voto formato di uno, o due circoli, e per quanto in due tavole relative alla descrizione delle Ooliti riportate da Ernesto Brucmanno nel suo trattato, che ha per titolo: *Thesaurus subterraneus ducatus Brunsuigii* si vedano figurate alcune pietre, che molto si accostano ai pezzi da me trovati, pur nonostante vi trovo qualche singolar diversità, onde non credo possano con sicurezza annoverarsi a quella specie.

Si uniforma ancora in gran parte ai ridetti pezzi di pietra la miniera di ferro limonosa, alla quale pure viene dato il nome di Oolite, come nota lo stesso Brucmanno, e Romè Delisle: ma i varj tentativi chimici che ne ho fatti mi hanno bastantemente persuaso, che sono di una sostanza diversa dalla detta miniera.

Ho rilevato ancora, che non tutti i detti pezzi di pietra sono simili fra loro, ma ve ne sono alcuni composti di un maggior numero di grani, ed i grani stessi sono di mole diversa: per esempio nello stesso pezzo vi sono dei grani della grossezza del panico, e ve ne sono di quelli, che arrivano alla mole di una grossa lente. Ancor questi però sono formati delle medesime durissime sfoglie concentriche in quel numero di sopra espresso, e strettamente legati assieme, colla differenza, che nella superficie esterna sono per la maggior parte appianati, e rappresentano vari circoli. In altro pezzo vi si trovano dei grani, che sono fra di loro ancòr più diversi, perchè alcuni hanno una protuberanza in mezzo, come vedesi nel num. 12 (Tav. XI.) fig. 13 lett. A, altri sono divisi da una, o due linee in forma di croce (fig. 13 lett. E. H. K.), altri sono tagliati da più linee, che si partono dal centro si distribuiscono in sfera, e vanno sino alla loro circonferenza, come potete vedere nel

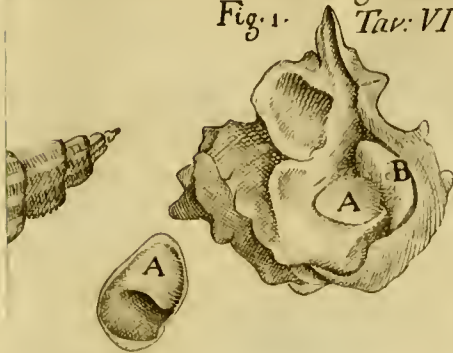
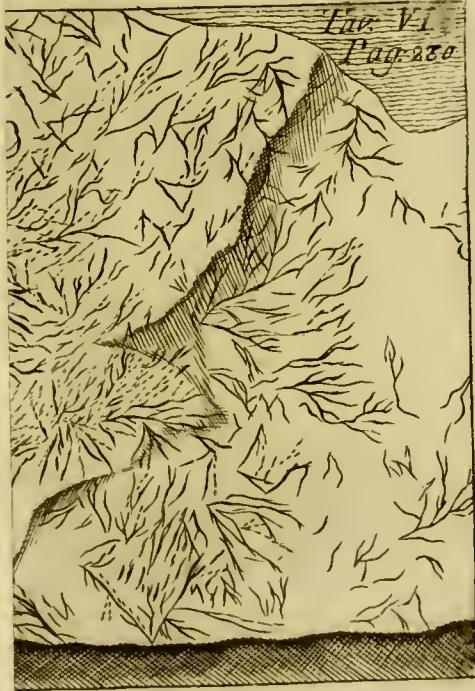
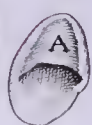
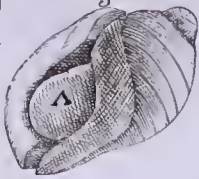
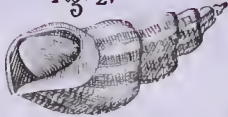
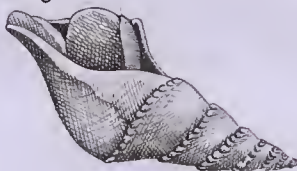
n. 12 (Tav. XI.) lett. G. e D., ed altri finalmente racchiudono nel loro centro dello spato cristallino, come vedesi (ivi) lett. I. B. C. F.

Per ultimo non ho mancato di rompere alcuni di detti pezzi per esaminarli interiormente, ed ho osservato nel loro centro, per quanto mi è sembrato, dello spato cristallizzato in forma quadrangolare, come potrete rilevare dalla stessa fig. 13 lett. C.

I riscontri, che ho fatto in seguito di questi pezzi di pietra con quelli descritti da varj Autori, e che hanno qualche analogia con quelli da me trovati, mi portano a credere, che siano della specie delle porpiti, giacchè le figure riportate da Guettard Tom. III. delle sue memorie tavola XII., e XIII. non differiscono dai detti pezzi, se non che nella grandezza, e la descrizione, che fanno delle Porpiti Bomare, e Bertrand sembra che confermino il mio sentimento.

Voi che avete buon'occhio per le cose naturali, esaminati che averete questi prodotti, che vi presento, saprete meglio di me conoscere la vera specie, onde vi prego, che mi comunichiate il vostre savio parere.

Mi resterebbe da descrivervi altri prodotti da me trovati, e che meco conservo, tra i quali un Agarico molto singolare, due grosse petrificate Mandibole, un Viperetto petrificato, alcuni Dattili di singolar figura, alcuni cristalli di monte uniti assieme con dei cristalli di Zolfo, un Granchio totalmente petrificato, alcuni Corni d'ammone ripieni di spato bianchissimo, ed in essi elegantemente cristallizzatosi, rilegati, ed impastati con alcune Belenniti nella sostanza del nostro marmo così detto di Caldana, ed alcune altre produzioni, ma contentatevi, che mi riserbi di farlo ad altro tempo, giacchè i ristretti limiti di una lettera non mi permettono che più a lungo vi rechi noja.

Siena 15 Gennajo 1799.

ISTO-

Pag: 230
Tav: VI
Fig. 1.
B
A
A
Fig. r.

Tav: VI
Pag. 230

Nº I

Pag: 230
Tav: VI

Fig. 3.

Fig. 1.

A

A

B

Fig. 2.

A

Fig. 4.

A

Fig. 5.

Nº 2
Fig. 1

Tav. VI
Pag. 230

Tav: VII

Pag: 250
Tav: VII
Fig. 3

Nº 3. Pag: 230 Tav: VII

Fig. 2.

Nº 4 Pag: 230 Tav: VII

Fig. 4. Fig. 5.

Pag: 230
Tav: VIII

Pag: 230
Tav: VIII

Nº. 5 Fig. 5. Pag: 230 Tav: VIII

Nº. 6 Fig. 7 Pag: 230 Tav: VIII

Tav: IX.
Fig. 8.

Pag: 230
Tav: IX.

Nº 7 Pag: 230 Tav: IX

Fig: 9

Fig: 8

Nº 9 Pag: 230 Tav: IX

Fig: 10

Tav: X

ag: 230
Tav: X
Fig: 11

N.° 9 Pag: 230 Tav: X

Fig. 11

N.° 10 Pag: 230 Tav: X

Fig: 11

Pag: 230
Tav: XI
Fig. 12.
Fig. 13
A
B
C
D
E
F
G
H

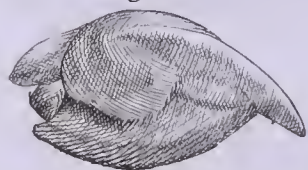
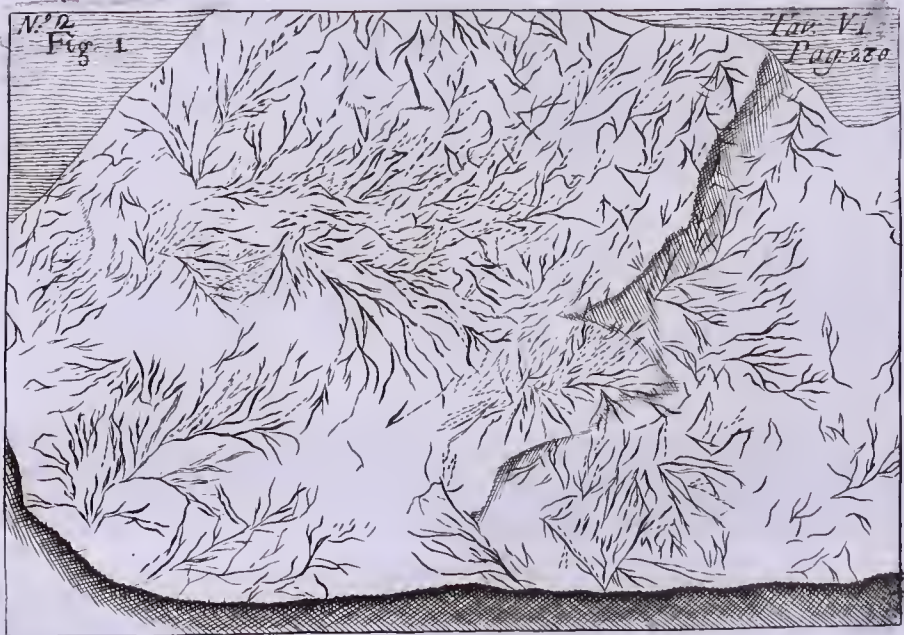
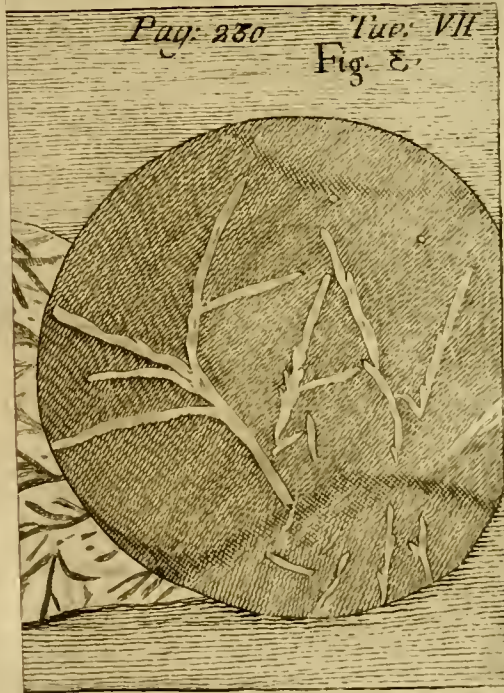
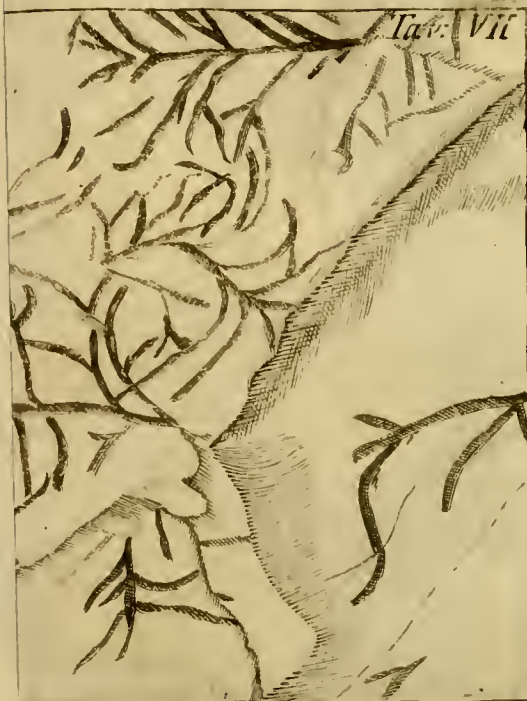
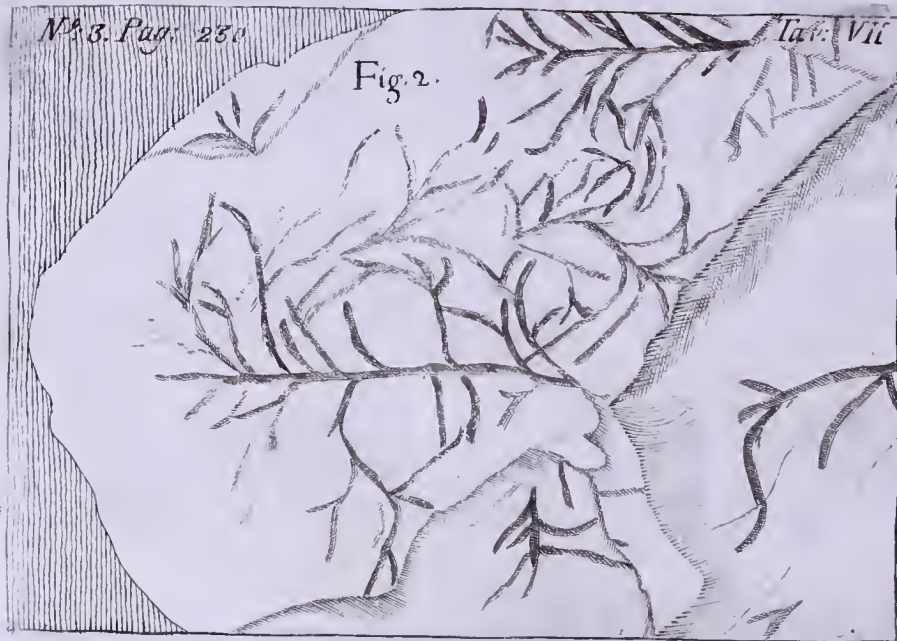
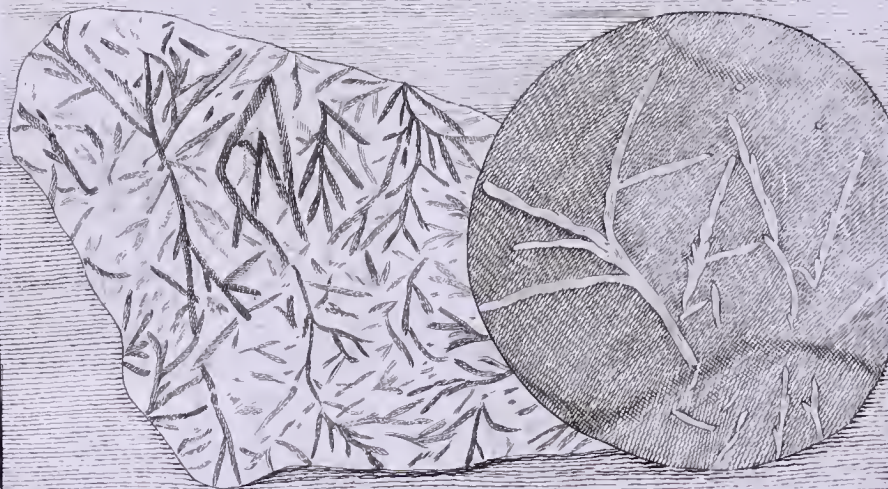
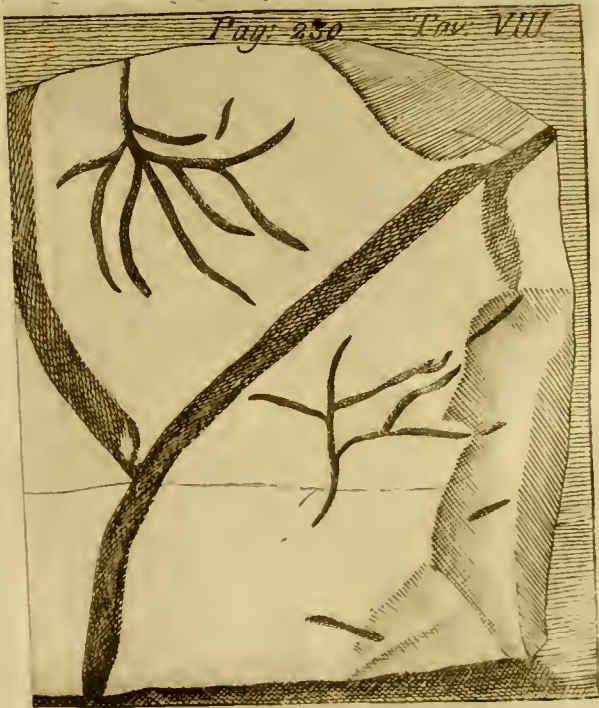
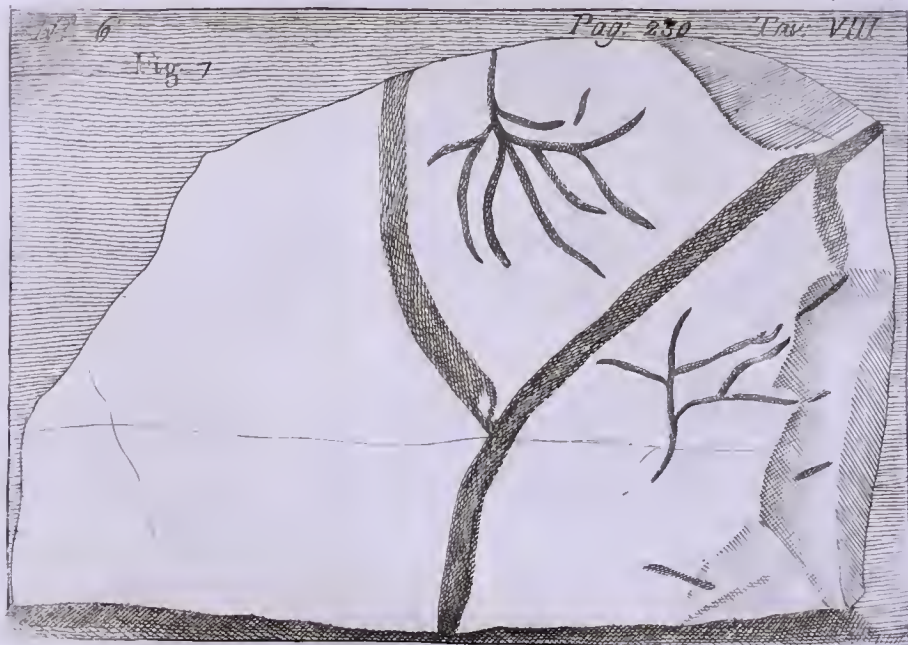
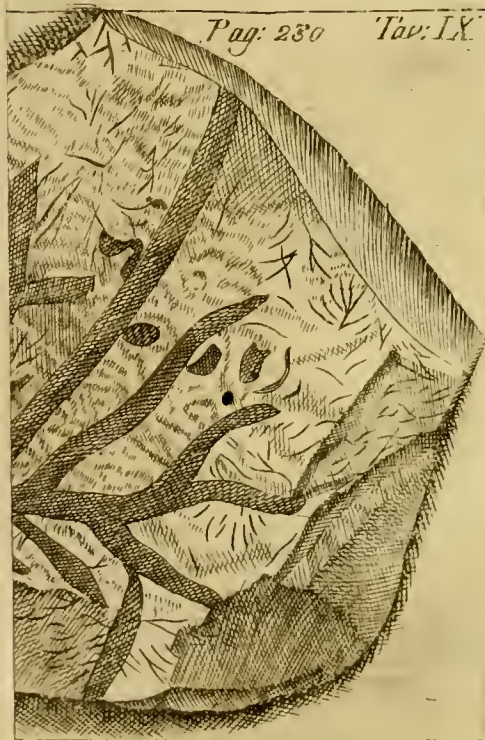
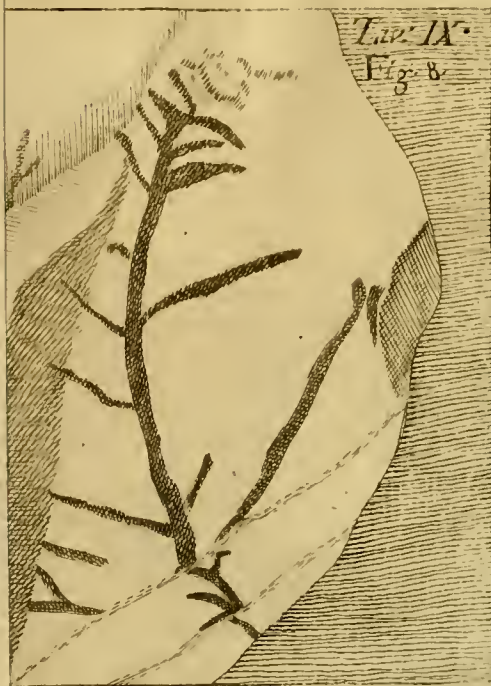
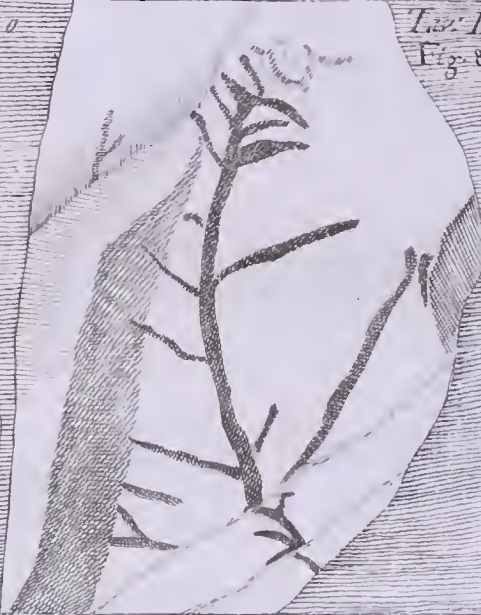
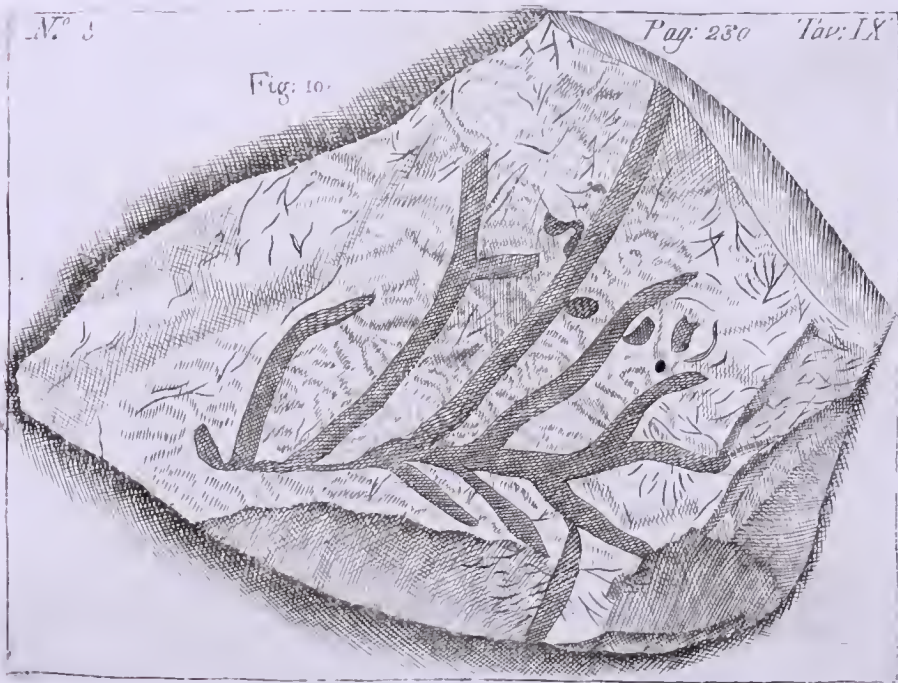
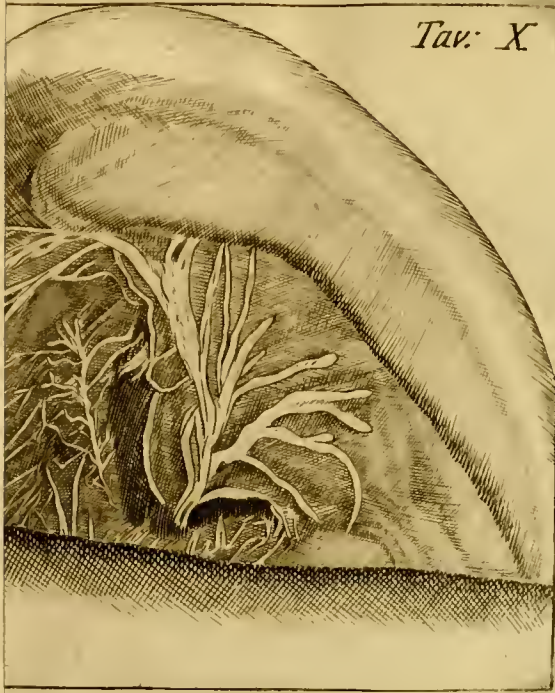
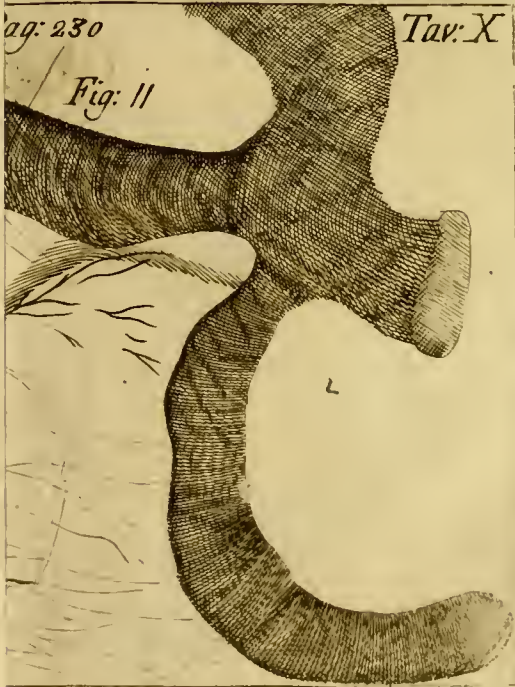
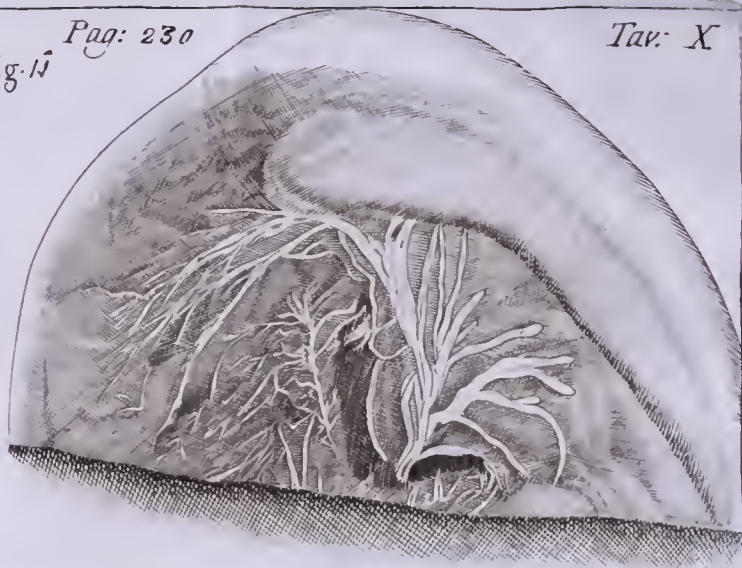
Pag: 230
Tav: XI
Fig. 13

N.° 11 Pag: 230 Tav: XI

Fig. 12

I H K

Fig. 13

E D C B A G F

N.° 12 Pag: 230 Tav: XI

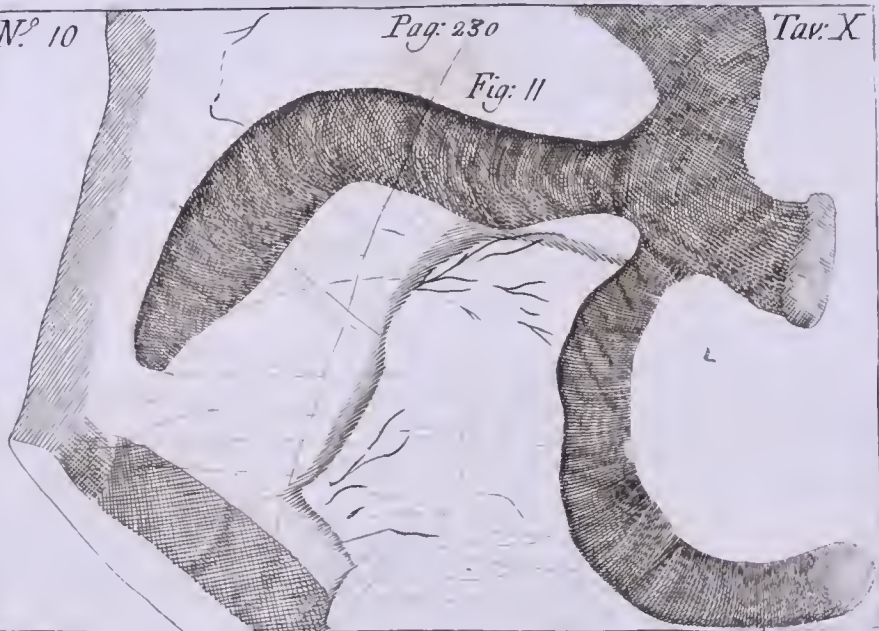
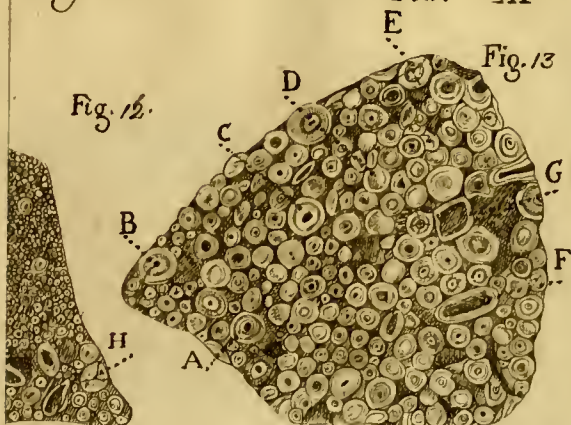
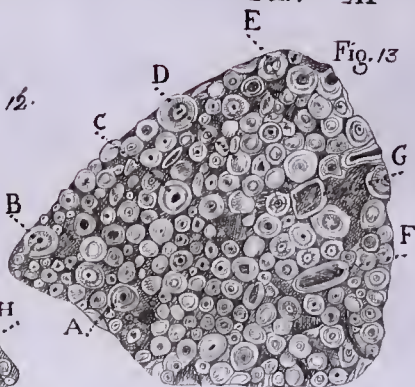
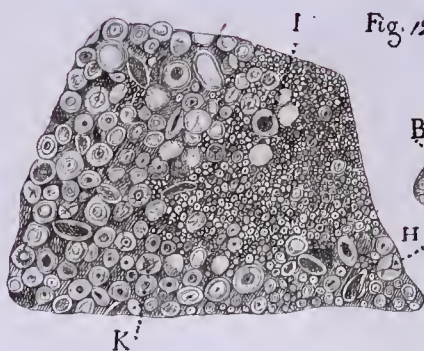
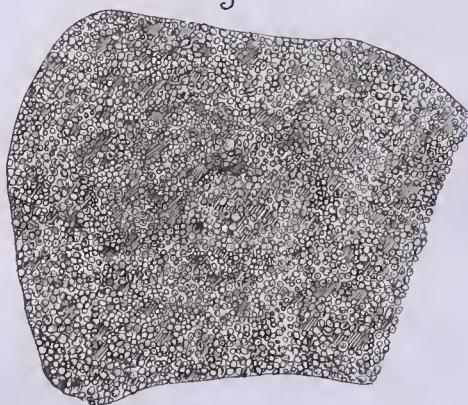



Fig. 13

ISTORIA

Di due gravidanze extrauterine

DEL SIG. ANASTASIO GAMBINI

Professore d' Ostetricia nell' Università
e Chirurgo Infermiere del R. Spedale della Scala.

SE le ovaje sono destinate a contenere i primi rudimenti dell' embrione umano, e se in questi corpi segue la fecondazione, come sembra posto nella più grande evidenza da un gran numero di fatti ricevuti per sicuri, ed incontrastabili nella Fisiologia, non deve più sorprendere che il feto, il quale dalle ovaje deve imboccare nella tuba Falloppiana, superarne tutto il tratto, discendere nella cavità dell' utero, ed ivi svilupparsi, crescere, e perfezionarsi secondo le leggi della natura, incontrando talora qualchè non lieve ostacolo in questo non facile tragitto, sia obbligato a fermarsi, e col concorso di favorevoli circostanze possa svilupparsi, e crescere fuori dell'utero. Ed infatti la storia Patologica, e Medica ci offre oramai una serie numerosa di osservazioni, che non lasciano dubitare che il germe non si sviluppi talvolta nello stesso ovajo, talvolta nella cavità della tuba, e che ancora, non avendo potuto in qualche occasione imboccare nella tuba, sia caduto nella cavità del basso ventre, ed attaccatosi alla superficie de' visceri in essa contenuti, abbia potuto svilupparvisi.

Fra le gravidanze, le quali per aver luogo fuori dell' utero diconsi extrauterine, forse la meno rara è quella, che succede nel canale della tuba; poichè a mio credere essendo la struttura, e la superficie della tuba molto analoga a quella dell' utero, presenta subito all'uovo obbligato a trattenervisi da qualche impedimento, che si frapponga al suo progresso nella tuba, ed alla sua discesa nella cavità dell' utero, le circostanze meno sfavorevoli al suo sviluppamento.

Quali poi siano gli ostacoli capaci d' impedire la discesa dell' uovo nella cavità dell'utero dopo che è stato ricevuto nella tuba, non può determinarsi con certezza per la mancanza di osservazioni idonee a dimostrarli nei cadaveri. Tuttavolta se non dispiaccia di so-

soſtituire il raziocinio appoggiato alle cognizioni anatomiche, ove le osservazioni, ed i fatti positivi ci abbandonano, potremo acquiſtare qualchè idea forse non lontana dal vero, almeno di alcuni di tali impedimenti. Se ci rammentiamo che il canale della tuba, più ampio al suo orifizio eſterno verso l' ovajo, diviene tanto più anguſto quanto più si avvicina al suo termine nell' utero, non ci sarà difficile di comprendere che l' uovo deve incontrare difficoltà tanto maggiore alla sua discesa, quanto più s' avanza nel canale. Esso nondimeno supera comunemente queſta difficoltà; ma l'orifizio eſterno della tuba in qualche caso può ammettere un uovo così voluminoso da non poter superare le anguſtie della parte inferiore del canale, e particolarmente dell' orifizio interno, il quale suole essere eſtremamente anguſto. L' uovo può trovarsi più grande dell'ordinario per essere troppo turgido di umori, o perchè siasi troppo trattenuto nell' ovajo dopo la fecondazione. La naturale anguſtia dell' orifizio interno della tuba può essere aumentata da qualche ingorgo, o durezza nata nel fondo dell' utero, o al medesimo orifizio, e da qualche corpo eſtraneo, che si trovi nella cavità dell' utero. Se la tuba sia troppo rigida, o per qualunque altra causa incapace di eseguire quel moto vermicolare, che promuove l' uovo verso l' utero; se sia mancante di quell' umore mucoso, che serve a renderla lubrica, e facilitare il moto dell' uovo; se sia infarcita di umori viscosi, e glutinosi, l'uovo in queſti, ed altri casi somiglianti, che inutile sarebbe rintracciare troppo minutamente, potrà essere impedito di arrivare al suo deſtino, e ciò specialmente dappoichè per la troppo lunga dimora nel canale, già abbiano germogliato le radici della seconda, e, come avverte il Vallisnieri, abbiano resa ineguale la sua superficie.

Sebbene però le gravidanze nella tuba non siano molto rare, se si prendano in complesso le osservazioni regiſtrate dagli Scrittori, pure quando si tratti di feti sviluppati, e perfetti a riguardo dell' epoca della gravidanza, e non già di casi i quali null'altro presentino che i reliquati di un feto, che si suppone esservi ſtato, o le morbose alterazioni, che ne sono derivate, queſte osservazioni possono ancora considerarsi per rare, e meritevoli di essere conservate. Tale è appunto, dottissimi Accademici, quella, che mi faccio un dovere di sottoporre al saggio voſtro discernimento. Essa vi pone sotto gli occhi un'altra particolarità, cioè una gravidanza tubale con una gravidanza falsa uterina. Ma prima io devo accennarvi le notizie intorno alla malattia, che precedè la morte della donna, che fu il soggetto di queſta osservazione.

Correva il terzo mese che a Girolama moglie di Vincenzo Serchi di Siena, d'anni quaranta, di coſtituzione sana, e madre di tre figli, mancavano i suoi mensuali repurgamenti, e poichè soffriva diver-

diversi altri incomodi proprj della gravidanza, non dubitava essa di esser gravida.

La sera del dì 16 del prossimo passato Febbrajo improvvisamente, e senza alcuna manifesta cagione fu assalita da dolori atroci nel bassoventre accompagnati da vomiti, convulsioni, e svenimenti. Il Medico Sig. Corsini accorso alla di lei assistenza non mancò di prescriverle quei rimedi, che stimò più efficaci a calmare i suoi travagli, ma inutilmente. Chiamato la susseguente mattina a visitarla, trovai che oltre ad un dolore permanente, e generale di tutto il basso ventre, di quando in quando soffriva dei dolori del tutto simili a quelli, che accompagnano il parto. I muscoli del basso ventre erano tesi, e rigidi, ma senza timpanizzazione, e senza febbre. Passai al riscontro dell' utero, e trovai il suo volume accresciuto, ed il suo orifizio chiuso, da cui gemeva piccola quantità di un siero sanguinolento. Da tuttociò giudicai che l' utero fosse gravido, e contenesse non già un feto, ma piuttosto una mola, e che i descritti dolori espulsivi indicassero gli sforzi, e le contrazioni di quel viscere dirette ad espellerla; perciò ordinai quei piccoli ajuti utili a quest' oggetto, e feci sperare alla donna un felice termine dei suoi travagli. Solamente la mattina del dì 19 i dolori si resero più violenti, particolarmente all'epigastrio, ove l' Inferma soffriva un senso molestissimo d' ardore, si manifestò il meteorismo del ventre, e sopraggiunse la febbre. Fu allora sopracchiamato il Sig. Dott. Antonio Mancini, il quale, avendo concepito giusto timore dell'attacco inflammatorio, ordinò la cavata del sangue, ed altri rimedj tendenti a raffrenarlo. La cavata del sangue fu replicata nel giorno stesso, ma a fronte di tutti i praticati soccorsi la sera del dì 20, e così dopo tre giorni di malattia morì la donna quasi in compendio.

Questo infausto successo non coerente al primo stadio della malattia, imprevisibile, e precipitato nel suo fine, pose giustamente in sospetto dell' esistenza di qualche occulta cagione, la quale ci proponemmo d' investigare colla sezione del cadavere. Non sì tosto fu aperto il basso ventre che ci accorgemmo che tutta questa cavità era inondata di sangue. Questo fluido in parte era sciolto, ed in parte coagulato, e la sua quantità fu giudicata intorno a cinque libbre. Tolto di mezzo con diligenza questo sangue si esaminarono ad uno ad uno i visceri del basso ventre contenuti nel sacco del peritoneo, e trovaronsi tutti nel più perfetto stato, e così senza la minima traccia di sofferta infiammazione. Sollevati poscia gli intestini, si osservò che la tuba Falloppiana della parte destra per un tratto di quattro dita traverse, incominciando poco al disotto dell' orifizio esterno fino alla sua parte media alla distanza di tre dita in circa dall' utero, dilatavasi in un tumore della grandezza, e figura di un uovo di gallina; questo tumore giaceva immediatamente sopra

pra l' ovajo, e intieramente lo ricuopriva, avendo dovuto levar di sito, e discoſtare il tumore, affine di mettere allo scoperto l' ovajo. Nella parte inferiore, ed anteriore del tumore medesimo scorgevasi nella superficie della tuba dilatata un grumetto di sangue, che vi ſtava aderente, tolto il quale, potè osservarsi che in queſto luogo appunto esisteva un vaso sanguigno dilatato, e lacerato, da cui era ſtato versato il sangue ſtravasato nella cavità del basso ventre. L' utero ancora, che indi si passò ad osservare, comparve quasi doppio del naturale fuori del tempo di gravidanza.

Affine poi di porci meglio in grado di esaminare ciò che si conteneva nella cavità dell' utero, e specialmente il tumore della tuba, si levò di sito lo ſteſso utero con le sue appartenenze. Ed aperta la cavità dell' utero con taglio longitudinale, si trovò in essa una mola carnosa del peso di un oncia e mezza, di colore rosso scuro, così aderente alla superficie interna dell' utero, che non potè separarsene che a ſtento. Dalla cavità dell' utero s' introdusse nel canale della tuba per il suo orifizio interno un sottilissimo specillo, e si aprì quindi lo ſteſso canale longitudinalmente per tutto lo spazio compreso fra l'utero, e la parte dilatata della tuba. Queſta porzione si manteneva nel più perfetto ſtato naturale. Dopo ciò si aprì con diligenza il tumore della tuba, che occupava il rimanente del canale, facendo un taglio longitudinale nella sua parte anteriore alquanto superiormente, e profondando il taglio per gradi fintanto che ci parve d' inciderne la soſtanza, e che non si presentò ai noſtri occhi un corpo vescicolare contenuto dentro al tumore. Si dilatarono i lembi del taglio, ed in tal modo si messe allo scoperto una gran parte dell' indicato corpo vescicolare, il quale si osservò perfettamente trasparente, talchè a traverso delle sue membrane scorgevasi chiaramente nuotare dentro di esso un corpo opaco simile ad un piccolo feto. Queſto corpo vescicolare era incontraſtabilmente un uovo, che non aveva potuto avanzarsi nella tuba, e calare nell'utero, ed aveva dovuto fermarsi, ed incominciare quivi il suo sviluppo.

Passati alcuni giorni si aprirono le membrane coſtituenti l'uovo accennato. Ne uscì un limpido umore, e potè meglio esaminarsi il corpo contenutovi. Queſto era, come già si era suppoſto, un feto perfettamente formato relativamente alla sua età all' incirca trimeſtre; si scorgevano ad occhio nudo le sue parti genitali maschili, e tutte le altre principali parti inclusivamente le più minute, come le dita, gli orecchi, gli occhi, il naso, e la bocca. La sua teſta era situata dalla parte dell'utero, ed i piedi verso l' orifizio eſterno della tuba. Era la sua lunghezza circa due pollici Parigini. Il tralcio, che dopo varie volute andava ad impiantarsi nella placenta, era molto grosso in proporzione della grandezza del feto. La placenta

era

era attaccata alle parti interne della tuba dilatata, ed era così ampia che circondava intieramente le membrane componenti l' uovo, talchè ci accorgemmo che nel fare il taglio longiditudinale per aprire il tumore della tuba, oltre alla sostanza di questo canale, era stata tagliata ancora la placenta. Quella parte della tuba interessata nel tumore contenente il feto, quantunque molto distratta, e dilatata, avea le sue pareti piuttosto ingrossate che assottigliate.

Tralascio molte osservazioni da me fatte intorno al feto surriferito, ed alle sue membrane, perchè gli sono comuni con qualunque altro feto di eguale volume, ed età contenuto nell' utero. In vece di questi inutili dettagli penso di cogliere questa favorevole occasione per farvi succintamente il racconto della più rara fra le gravidanze extrauterine, che mi successe di osservare molti anni sono nel Regio Spedale di S. Maria nuova di Firenze.

Avvenne il caso nella persona di Orsola Trevisani vedova da molti anni di Bartolommeo Mazzoni di Firenze, madre di più figli, nella sua età di sopra 60 anni. Fu essa portata allo Spedale il dì 11 Dicembre 1782 per un Ernia incarcerata, di cui pochi giorni dopo morì. Io feci la sezione del cadavere a solo oggetto di esaminare lo stato degl' intestini; ed aperto il basso ventre mi comparve subito un tumore della figura, e volume di un grosso limone situato a sinistra nella pelvi, ed involto in un lembo di omento. Preso quel corpo in esame, conobbi essere l' ovajo sinistro, il quale oltre ad essere cresciuto a quella mole, era degenerato in una sostanza quasi ossea. Nel levare di sito questo tumore per meglio esaminarlo, osservai che era aderente alla tuba Falloppiana, di cui non rimaneva intatta, che una piccola porzione verso l' utero. Il tumore fu tagliato ov' era meno duro, e ne scaturì poca materia simile al miele sì nel colore, che nella consistenza, molto fetida. Il rimanente poi della materia contenutavi era una sostanza adiposa, densa, ripiena di peli, e di piccoli capelli. Avendo successivamente agitata nell'acqua questa materia adiposa, se ne separarono otto denti, dei quali sei molari, e due incisori, mancanti delle loro radici, ma perfettamente smaltati, e grossi come quelli degli adulti. Due dei detti denti erano piantati in un pezzetto d'osso, che ci parve una porzione dell' osso mascellare. Vi esisteva inoltre un pezzo d' integumento, che sembrava appartenere alla parte capillata, poichè vi si vedevano distintamente i dutti dei capelli. L'ovajo, che formava il continente delle accennate parti era nella maggior parte ossificato, e nella sua superficie interna vi si vedevano delle ineguaglianze a guisa di solchi.

Che spesso nei tumori delle ovaje si trovino delle parti carnose, cartilaginose, ed ossee, ed anche dei peli, niente ciò prova per stabilire le gravidanze nell'ovaja; poichè simili prodotti accade pu-

re

re di osservarli in tumori steatomatosi di altre parti del corpo, ove non può supporsi lo sviluppo di un feto. Ma quando vi s' incontrano dei capelli, dei denti, e delle altre ossa, sufficientemente caratterizzate per doverle considerare come produzioni organiche, niuno in tal caso ha potuto contrastare che tali reliquati non apartengano ad un feto, che ivi un tempo ha dimorato. Così questa osservazione accresce il piccol numero dei fatti, i quali dimostrano che nella ovaje può accadere lo sviluppo del feto, e che perciò ne segue quivi la fecondazione.

Spiegazione della Tavola XII.

Fig. 1.

Rappresenta la tuba Falloppiana della parte destra con l' utero e sue appartenenze.

A. L' utero.

B. B. Le ovaje.

C. C. I ligamenti rotondi.

D. La tuba Falloppiana sinistra.

E. E. La tuba Falloppiana destra con le sue fimbrie intorno all' orifizio superiore.

D. D. D. Tumore prodotto dalla dilatazione della tuba Falloppiana sinistra.

a. Luogo ove si osservava la lacerazione, per cui era sgorgato il sangue trovato nella cavità del bassoventre.

b. *b*. *b*. Apertura fatta in detto tumore per mettere allo scoperto l' uovo contenutovi.

c. *c*. L' uovo intiero.

d. *d*. *d*. La placenta che circondava l' uovo in tutta la sua periferìa.

Fig. 2.

Rappresenta il tumore sopradescritto della tuba Falloppiana sinistra, e l' uovo aperti con taglio longitudinale per far vedere il feto contenutovi.

A. A. La tuba.

B. B. B. Il tumore o dilatazione della medesima.

a. Il luogo dell' accennata lacerazione.

b. *b*. *b*. La placenta divisa.

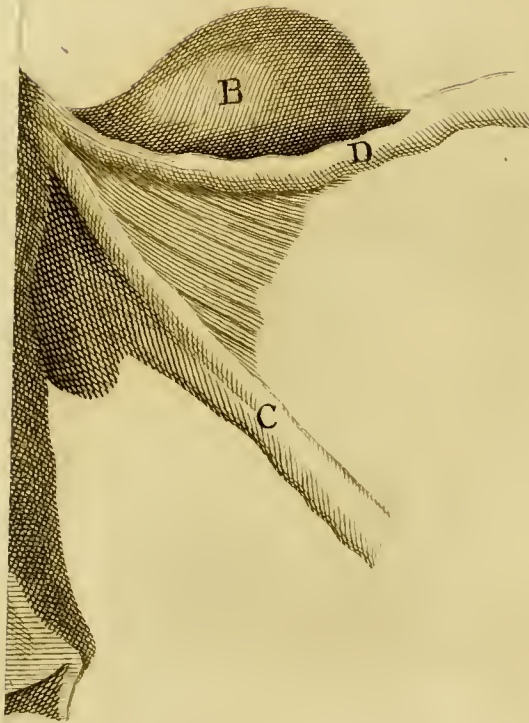
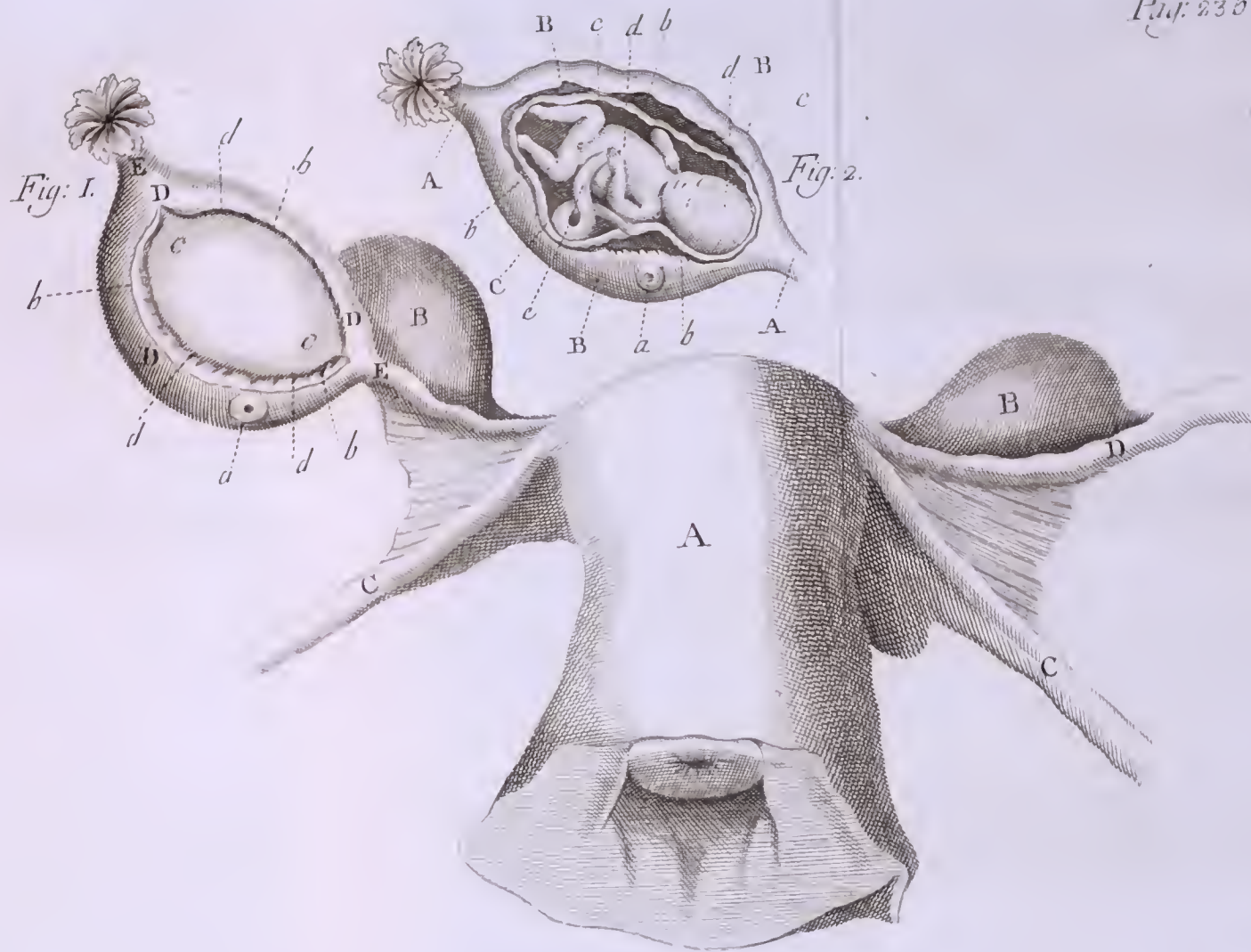
c. *c*. *c*. Le membrane dell' uovo aperto.

d. *d*. Il feto.

e. Il cordone ombelicale.

2.

Fig: I.

Fig: 2.

ISTORIA RAGIONATA

Di una rara e singolare tardanza e difficoltà agli sgravj intestinali, prodotta dalla quadrupla lunghezza e triplice ripiegatura dell' intestino retto, e dall' enorme dilatazione del retto e del colon

DI DOMENICO BATTINI

P. Professore di Medicina Pratica e Segretario perpetuo dell'Accademia.

LA natura, sempre provida e sempre intenta alla conservazione dell' umano individuo, ha regolato in guisa il bisogno delle evacuazioni inteſtinali, che possono esse talora molto ritardarsi senza sconcerto, e senza che l' uomo giuſtamente possa dirsi ammalato. La comune osservazione ci pone giornalmente sotto gli occhi un gran numero di uomini, i quali godono di una piena e ſtabile salute, nel tempo che vantano la loro particolare tardanza a sgravarsi del ventre senza moleſtia; nè la ſtoria medica è avara di casi, ove gl' individui dell' uno e dell' altro sesso si veggono soggetti a queſta irregolarità, che Haller si è data la cura di esattamente raccogliere e indicare. Ma queſta ordinaria tardanza, comunemente detta ſtitichezza, o non è che l' effetto della lassezza e torpidezza degl' inteſtini, e della ſtraordinaria mole e indurimento delle materie contenute, per cui queſte non sono che lentamente promosse; o dipende dal trascurare alcune cause coadjuvanti, imputabile a errore o ignoranza; o in fine non è che un sintoma di altra vegliante malattia: molto perciò lontana in tutti i casi mentovati dal coſtituire per se medesima una malattia essenziale e primaria, e dall' esigere altro metodo curativo fuori di quello che ha per iscopo semplice ed unico di sollecitare le inteſtinali evacuazioni.

La tardanza dei consueti sgravj del ventre allora solamente dee riguardarsi come una particolare e formale malattia, quando oltrepassa i limiti ordinarj, e la funzione si prova difficile, laboriosa, dolorosa, ed è preceduta e accompagnata da accidenti insoliti e gravi, e quando la consistenza e qualità delle materie che si rendono si allontana considerabilmente dal suo coſtume ordinario. In que-

sto aspetto si è che il ritardo e la difficoltà dee riconoscere delle cause sue proprie, delle lesioni insigni, o qualche difetto organico particolare. In questo caso il metodo curativo può doversi grandemente allontanare dalle idee comuni e dai rimedj usitati. In simili contingenze fa d'uopo di una incredibile sagacità nel giudicarne, della maggior prudenza nel condursi, e di tutto il coraggio per opporsi ai volgari pregiudizj.

Quantunque l'istoria medica ci abbia conservata la memoria di molti casi di tal genere, i cui dettagli darebbero molto lume per fissarne i segni diagnostici e prognostici, e per dirigerne la cura, ci spiace, allorchè si passa a consultarli, di trovarli così digiuni, così sterili e mancanti, onde per lo più sembrino appena sufficienti alla pura e semplice indicazione di un fatto successo; cosicchè non male si apporrebbe chi avuto riguardo specialmente alla storia dei fenomeni morbosi, sostenesse non essersi per anco incominciato a raccoglierne i materiali, e considerata la moltitudine delle cause ne stimasse la cognizione patologica imperfettissima e i fondamenti del metodo curativo del tutto mancanti. Non è mia intenzione, nè convenevole a questo luogo il ritessere la storia delle cose da altri riferite su tale argomento, delle quali danno già ampio ragguaglio le opere di Bonet, di Haller, di Lieuteaud, e di altri; ma le riflessioni da me fatte di passaggio sul loro complesso bastano per giustificarmi se nel fare il racconto di un caso singolarissimo di questo genere, e del tutto nuovo a riguardo della particolare lesione organica trovata negli intestini crassi, scenderò ad un dettaglio forse troppo minuto, e mi sforzerò di illustrarlo con varie osservazioni, le quali ho stimato tanto più importanti, quanto più strani furono i fenomeni, che accompagnarono il male, quanto più arduo il giudicarne in vita, e quanto finalmente più raro e singolare ciò che l'apertura del cadavere ne scoperse.

Don Camillo Rospigliosi Romano figlio primogenito del Principe Don Giuseppe fu il soggetto dell'istoria luttuosa, a cui mi accingo. Egli fino dalla più tenera età non godeva dell'esercizio libero e facile della funzione intestinale, poichè, secondo che ne ho raccolto, si era obbligati a procurare le evacuazioni per mezzo dei clisteri, e le materie erano costantemente molli, nè mai compatte e dure. Questo sistema non era, almeno in progresso, sufficiente a mantenere la regolarità degli sgravj, mentre si trattenevano sempre, e si accumulavano negli intestini delle materie, le quali erano poi espulse di tempo in tempo in quantità straordinaria. Tale era il suo stato quando l'anno 1784 in età di sette anni fu destinato e ricevuto per uno dei Convittori del Nobile Collegio Tolomei di Siena.

Quì fu trovato inutile l'uso giornaliero dei clisteri, perchè non reca-

recava il desiderato regolare sgravio, nè preveniva gli sconcerti. L' ajuto dei clisteri sperimentavasi vantaggioso solamente all' effetto di promuovere e facilitare le evacuazioni ai loro consueti periodi, o di prevenirne il soverchio ritardo. Le cose procederono così per più anni senza che eccitassero una più speciale attenzione di chi allora presiedeva alla salute dei nobili Convittori. Don Camillo si accomodava perfettamente alla vita comune senza inconvenienti, nè si lagnava di notabili incomodi; talchè sembrava che il disordine riguardasse più la pulizia che la salute, e dubitavasi più del morale che del fisico. Ma ciò che in progresso si andò sviluppando mostrò chiaramente che a torto si incolpava il morale, e che realmente esisteva una causa fisica di particolar carattere, la quale meritava la più scrupolosa attenzione. Gli sconcerti, che non permettevano dubitarne, incominciati da lievi gradi presero maggior vigore e possesso verso l'anno 1788, quando appunto venne a me affidata la cura medica di questi nobili Giovinetti. Dopo quel tempo fin verso il fine dell' anno 1792, tolto qualche intervallo di calma o di minor disturbo, le circostanze, che accompagnavano l' esercizio della funzione intestinale, furono le seguenti.

Dopo aver goduto una perfettissima quiete per più giorni in seguito al precedente sgravio, cominciava egli a risentire verso sera un'enfiagione all' ipogastrio prodotta dalla dilatazione del ventricolo, la quale nella notte si dileguava spontaneamente. Questa enfiagione diventava ogni giorno maggiore ed a gradi si estendeva a tutto il basso-ventre. In questo tempo, esaminando quella cavità quando era libera e cedente, non si scuopriva in essa veruna durezza, veruna resistenza, verun punto dolente alla pressione. Soltanto nella regione ipogastrica compariva, e a poco a poco cresceva una tumefazione, che sorgeva dalla pelvi, lateralmente e superiormente circoscritta, varia in diversi tempi sì nel volume che nella figura. Allorchè essa aveva acquistata una mole considerabile, il basso-ventre si rendeva universalmente sempre più gonfio a ore determinate con frequenti e forti gorgogliamenti di aria e con dei doloretti vaganti. L' appetito si perdeva, subentrava la nausea a qualunque cibo, si facevano frequenti esplosioni di aria dallo stomaco, il polso si rendeva concentrato e frequente, nei maggiori insulti suscitavasi qualche grado di febbre, le orine erano abbondanti e chiare, talora scarse e fosche. Intanto svegliavansi molesti stimoli all' estremità del retto e ne succedevano le evacuazioni, ma scarse, nè proporzionate al bisogno ed all' orgasmo eccitato nel basso-ventre. Se l' operazione era lasciata alla sola natura, non si otteneva che a stento lo sgravio compiuto nel corso di molti giorni, degradando il tumulto intestinale a misura che se ne vuotava la cavità. Quindi cessava la distensione flatulenta del ventre, si restituiva l' appetito, e si dile-

guava ogni apparenza di malattia. Se allora tornavasi ad esplorare il basso-ventre, si trovava del tutto o nella massima parte distrutta l' indicata tumefazione dell' ipogastrio, non lasciando dubbio che non traesse essa l' origine e non fosse intieramente formata dall'ammasso delle materie fecali trattenute negli intestini. Sebbene però riuscisse così naturalmente lo sgravio, si osservava che v' impiegava un periodo lungo e molesto, e che non essendo esso perfetto, più spesso tornava il travaglio, o accrescendosi più del solito l' arresto, le dejezioni diventavano in seguito più difficultose ed accompagnate da maggiori tensioni di ventre, da tormini più vivi, da stimoli più molesti, ed anche da febbre. Inoltre le materie che si evacuavano, sempre molli, prendevano un color fosco e nerastro, e le orine diventavano scarse e fosche. Che se l' evacuazione era ajutata dai clisteri, si scaricavano le materie più prontamente e in maggior copia, ed i travagli erano più brevi e più rari. I periodi degli sgravj non erano sempre eguali, ma ora di sei, ora di otto, o più giorni. Le evacuazioni generalmente erano sollecitate dal moto a piedi o a cavallo; i tempi asciutti sembravano contribuire alla loro facilità più dei tempi umidi. Un vitto pieno e sostanzioso rendeva più gravi e più spessi i travagli. E fin d' allora si osservò che quando i travagli erano più forti si risvegliavano certi dolorosi stiramenti nella polpa or dell' una or dell' altra gamba, ma più spesso nella destra.

Meditando sulle cagioni di questo antico e ostinato disordine della funzione intestinale, non si era inclinati ad accusarne un vizio della digestione, la quale nei tempi di quiete si eseguiva a perfezione. Il primo effetto si osservava costantemente circoscritto al trattenimento e coacervamento delle materie fecali negli intestini. Tutti gli altri sconcerti si suscitavano in conseguenza, crescevano e si sviluppavano a misura che l' arresto si aumentava, e questo dissipato, svanivano pur essi, nè si conobbe giammai che per altra qualunque siasi cagione, ancorchè accidentale, venissero rinnuovati. La tensione dunque e flatulenza del ventre, l' inappetenza, la nausea, i dolori, e gli altri sintomi che si aggiungevano a misura della grandezza del travaglio, riconoscevano decisivamente ed unicamente l' indicato arresto per loro causa occasionale, e la sorgente di tutti i disordini dovea perciò ricercarsi nella causa immediata degli arresti.

Or questa causa sembrava molto semplice e verisimile, ed anche assai conforme alle circostanze, facendosi consistere nella atonìa e singolare inerzia del condotto intestinale e particolarmente degli intestini crassi. Senza una tal supposizione non si spiegava come gl' intestini crassi e secondo che io credeva, specialmente il retto, standosene puramente passivi, permettessero un sì lungo trattenimento delle materie. Non aveva qui luogo ciò che si osserva co-

munemente

munemente negli ſtitici, cioè l' indurimento delle medesime, onde ripeterne la difficoltà dell' uscita. Esse, come si è già avvertito, si mantenevano coſtantemente molli, e di tal condizione si osservavano in qualunque tempo ne seguisse l' espulsione, sia naturalmente, sia col mezzo dei cliſteri o dei purgativi, lo che sembra indicare poca attività nei vasi assorbenti. La malattia cadeva appunto in un soggetto di fibra per natura lassa ed inerte, e per temperamento tardo e torpido sì nel fisico che nel morale. La frequenza e forse l' abuso dei lavativi nell' infanzia poteva aver contribuito a confermare gl' inteſtini crassi in questo originario loro difetto. Si aggiungeva che la cavità del basso-ventre aveva un' ampiezza ſtraordinaria attesa l' elevatezza considerabile e projezione in avanti della cassa ossea del petto, onde i muscoli del basso-ventre avevano una lunghezza maggiore dell' ordinario ed erano più grandi del dovere tanto il diametro longitudinale, quanto il diametro trasverso dal di dietro in avanti di queſta cavità,

Non essendo allora permesso di andar più oltre colle congetture, fu adottata e secondata queſta idea nel siſtemare la cura. Sul fine adunque della primavera del 1788 Don Camillo fu poſto all'uso della limatura di ferro unita con piccolissima dose di rabarbaro, che produceva i migliori effetti. Ma verso il termine del mese di Luglio dello ſtesso anno essendosi rese comuni in Siena le diarree, ne fu attaccato ancora Don Camillo, che dopo esserne guarito ricadde nell' eccesso oppoſto. Fu attribuito l' accresciuto ritardo degli sgravj ad un maggior grado di atonìa inteſtinale indotto dalla malattia sofferta; quindi fu prescritto l' infusione a freddo di china-china e l' uso delle bevande gelate, con provvedere frattanto al bisogno di sgravare il ventre ora coi lavativi, ed ora con piacevolissimi purgativi e specialmente con tenui dosi delle pillole dal Gelli, le quali si trovarono in queſta occasione le più conferenti. Sotto queſto siſtema dal Settembre di detto anno al Febbrajo dell'anno seguente 1789 erano le cose ridotte in tal buon' ordine che Don Camillo godeva del benefizio del ventre regolarmente senza bisogno neppure dei cliſteri.

La rosolia, cui allora soggiacque, formò un' epoca di ricaduta nei primieri sconcerti, ma gli ſtessi rimedj non produssero i medesimi vantaggi, nè di più fu ottenuto dalla tintura di marte, dalla corteccia peruviana in soſtanza, e da altri rimedj di queſto genere. I purgativi poi di qualsisia specie ed in qualunque minima quantità recavano tale diſturbo, che volendo insiſtere nell' uso di essi, piuttoſto che l'evacuazione inteſtinale, provocavano il vomito. L' iſtessa acqua del Tettuccio, egualmente che qualunque altra acqua minerale catartica, o era rigettata per vomito, o passava tutta per le vie orinarie; queſta essendo ſtata in qualunque altro tempo

po la sorte di simili tentativi. I clisteri semplici o emollienti non facevano altro effetto che quello di aumentare la turgidezza del ventre senza evacuazioni, le quali venivano soltanto promosse dai clisteri avvalorati con il sale d' Epsom o fatti con l' acqua del Tettuccio. Fu ricorso al moto a cavallo. Questo esercizio per un certo tempo produsse i più lodevoli effetti, succedendone quasi immediatamente degli sgravj spontanei e regolari di materie più compatte del consueto, ed al contrario sospendendosi gli sgravj quando le circostanze non permettevano di coltivarlo. Ma i suoi vantaggi cessarono poi di essere così evidenti e sicuri quanto a promuovere le evacuazioni intestinali, sebbene fossero insigni per rapporto all' universale.

Trovavasi Don Camillo appunto in queste circostanze quando la sua malattia sul fine dell'anno 1790, sopra una mia relazione, fu presa in esame da tre dottissimi Professori Romani. Essi furono di parere che si dovesse stabilirne *la sede nel ventricolo e negli intestini*, *e consistere in una atonìa ed inerzia delle medesime viscere*, che dedussero da *una sorgente molto alta e lontana*, in veduta che *la Nonna paterna*, *il Padre*, *ed il Zio sono soggetti a cardialgìe riversive*, *e che il Padre e specialmente la Madre vanno soggetti a costipazioni e durezze di ventre nojose*. Non si credettero in stato di determinare la causa occasionale, ma conobbero essere dell' ultima importanza la convenevole scelta dei cibi e delle bevande, e proposero che il malato avanti il pranzo *per ajutare le forze digerenti* facesse un uso discreto della conserva di ginepro, e *per avvalorare le forze espellenti delle intestina* prendesse qualche modesta dose delle pillole tartaree dello Scrodero avanti la cena. Quando si fosse ottenuta la remozione dell' incerta causa occasionale erano di parere di far ritorno ai rimedj tonici e corroboranti altre volte usati. Non stimarono conveniente di approvare l' uso di qualche acqua minerale ricevuta per doccia o sia per getto continuato negli intestini, ma proposero la doccia esterna sul basso-ventre, e per la stagione e circostanze più propizie consigliarono il ferro unito con qualche rimedio aperitivo e l' uso interno delle acque marziali, fermo stante l' esercizio assiduo del cavallo.

Un sentimento così dotto e savio meritava bene di esser messo a prova con esattezza. La conserva di ginepro riuscì molto utile tanto allora che in altri tempi. L' uso delle pillole tartaree dello Scrodero non fu in principio sì felice; in dose più tenue non operavano, in dose maggiore cagionavano disturbi ed inutili stimoli. In progresso di tempo nella discreta dose di 12 o 14 grani per sera riuscivano a produrre piacevolmente le evacuazioni, purchè in detta quantità fosse compresa qualche porzione di resina di scialappa e si adoperassero quando già si era fatto un certo cumulo e già que-

queſto rendevasi palese al tatto, e se ne continuasse ogni sera l'uso fino allo sgravio. Alla buona ſtagione fu insistito nell'esercizio del cavallo e nell' uso dei corroboranti, e fra gli altri dell' acqua di Rio. Non contenti dei tenui vantaggi che si riportarono da queſte diligenze, nell'eſtate del 1791 fu determinato di sperimentare gli effetti sì della immersione, che specialmente della doccia inteſtinale alle acque dei Bagni di Monte Catini. Fu così fortunato l'esito delle prime prove della doccia fatta con l'acqua della Terma Leopoldina, che avendo prontamente ed efficacemente e senza alcun piccolo disordine o diſturbo apportato un compiuto sgravio, si esprimeva Don Camillo, appieno sollevato e contento, di non essersi da gran tempo trovato così bene come dopo una tal prova. Egli altresì potè passare felicemente l' acqua del Tettuccio, senza ottenerne però lo sgravio per il secesso, ma sempre per le orine. Dopo queſta cura che aveva per primario oggetto di sperimentare l' attività tonica delle acque applicate immediatamente agli inteſtini crassi, si reſtituì in Siena in ſtato lodevole ed a poco a poco si ridusse in grado di potersi facilmente sgravare del ventre ai soliti suoi periodi o con l'ajuto delle solite pillole tartaree dello Scrodero, o talora spontaneamente, e senza ragguardevoli diſturbi; avendo a ciò soprattutto contribuito gli esercizj della villeggiatura e l'uso dell'uva perfettamente matura. Ma, come quasi sempre è succeduto, che l' inverno, sia per il freddo ed umido, sia per la diminuzione del moto o per altre accidentali cause, ha portato nuovi oſtacoli alla regolarità degli sgravj ed ha rinnovati più o meno gli antichi sconcerti, lo ſtesso pure accadde in qualche parte nel principio dell'anno 1792, senza potersi ottenere dai rimedj consueti la pronta reſtituzione al suo ſtato più tranquillo e vantaggioso. Per tal motivo alla nuova eſtate non si esitò a riprendere l' uso della doccia inteſtinale, la quale fu eseguita in Siena colla ſtessa acqua fatta trasportare dai Bagni di Monte Catini.

In tal maniera avevamo avuto il contento di vedere ridotto Don Camillo in uno ſtato plausibile, giacchè si sgravava del ventre senza incomodo, per lo più senza ajuto di rimedj, la sua macchina si era sempre più sviluppata, la sua complessione si era fortificata inclinando allo ſtato pinguedinoso, amava gli esercizj del corpo, ed il suo carattere malinconico e tardo si era corretto, moſtrandosi vivace, assai franco, ed allegro. In queſto ſtato intorno ai primi di Febbrajo dell'anno 1793 cadde ammalato di scarlattina, mentre nelle prove della Commedia da recitarsi in quel medesimo carnevale dai nobili Convittori nel loro teatro faceva la delizia dei Cavalieri che l' iſtruivano e l' ammirazione dell' udienza. La malattia non poteva essere nè più benigna nè più regolare, nè poteva succederne una più felice convalescenza. Fu però nel tempo della con-

convalescenza che, forse per mancanza del moto e dei consueti esercizj, s' incominciò ad osservare ritardata ed inobbediente la funzione del ventre. Le pillole purgative, che in principio ottenevano placidamente l' effetto, si resero qualche tempo dopo inefficaci, tornò in campo la flatulenta espansione del ventricolo e degli intestini da molto tempo sospesa; quindi i tormini, gli stimoli inutili e molestissimi, le inappetenze, le nausee, ed altri simili accidenti. Niuna cosa fu stimata più innocente che il ricorrere ai clisteri col fine di ottenere gli sgravj del ventre col minore possibile sconcerto e pericolo. Ma i clisteri o emollienti o stimolanti, o a maggiori, o a minori quantità, o di rado o più spesso replicati, lungi dall' invitare gl' intestini a sgravarsi, cagionavano in vece uno sconcerto incredibile mediante l' enorme quantità di aria, di cui determinavano costantemente lo sviluppo, mentre il fluido era prontamente reso per le vie dell' orina.

Non sapevasi a qual partito appigliarsi quando giunse da Monte Catini una quantità della solita acqua minerale stata commessa per misura di previsione. I singolari vantaggi ottenuti dalla doccia intestinale con quest' acqua a quei Bagni ed in Siena stessa nei due anni precedenti ponevano nella dolce lusinga di trovarvi anche in questa occasione il potente ajuto per procurare lo sgravio del corpo già da più settimane ostinatamente interrotto. Egli prese la doccia; ma qual fu lo stupore in vedere che non rendeva l'acqua, e che l' acqua ritenuta cagionava stimoli orribili a segno di mettere in convulsione tutto il sistema muscolare senza il minimo effetto! Conobbi nel momento che la mancanza di effetto nasceva dal perdersene il punto favorevole nel brevissimo intervallo necessario per adattarsi al comodo. E coll' avvertenza di obbedire agli stimoli senza riguardo, a più riprese fu ottenuto fra gli spasimi lo sgravio. Allora si rese evidente che le circostanze erano cangiate, che una forte disposizione allo spasmo ed il suo eccitamento per qualunque piccolo stimolo e per quei mezzi stessi, per i quali altre volte conseguivasi placidamente ed efficacemente il benefizio del corpo, formava un nuovo ostacolo ed una scabrosissima difficoltà alla riuscita dei rimedj. Ciò in seguito venne maggiormente confermato da un dolore in una delle gambe, che risvegliatosi in questa occasione prese poscia sempre più aumento, finchè non si potevano ottenere di nuovo gli sgravj. Questo dolore facevasi sentire specialmente quando la gamba era tenuta in quiete e conseguentemente quando l'infermo sedeva, oppur giaceva nel letto, e si acquietava quando teneva in moto la gamba. Perciò non solo egli era costretto a stare in piedi e passeggiare tutto il giorno con grave suo incomodo, ma neppur la notte gli era lecito prendere il consueto riposo, trovandosi spesso obbligato o a scendere dal letto e passeg-
giare,

giare, o a farsi agitare e sfregare la gamba da un assistente. Vidi la necessità di rimuovere ogni sorta di irritamento, e poichè anco la doccia di acqua pura produceva sconcerto, continuando i clisteri ad essere impraticabili, aspettai a riprenderne l' uso che la natura si mostrasse disposta all' evacuazione. Allora una docciatura leggiera al retto, quanta bastasse per un dolce invito, produsse ottimamente l' effetto, lo sgravio delle materie fu copiosissimo ed al sommo sollevante, mentre oltre alla cessazione estemporanea dei disturbi addominali, ed al ritorno dell'appetito, cessò pure nell' istante ogni incomodo alla gamba. Ciò per altro non consolava abbastanza, nè fu di lunga durata. Sebbene si fossero ottenute le evacuazioni del ventre in un modo facile e molto meno tumultuoso della volta precedente, non fu che dopo venti e più giorni che ebbero principio, nè vi era ragione di sperarle in seguito spontaneamente più sollecite e più placide. Onde mi determinai di dimandare un' abboccamento col dottissimo Sig. Dott. Massimi Medico della famiglia Rospigliosi in Roma, noto per le pregiabili sue opere, il quale a tale oggetto si trasferì in Siena.

Riconobbe pur' esso la concorrenza di una spasmodìa insigne, e senza abbandonare la supposizione dell' atonìa, come causa predisponente primaria, vide la necessità di togliere di mezzo la novella cagione di sconcerti prima di ritornare alla cura dell' antica. Credette peraltro che vano sarebbe ogni sforzo se innanzi non si trovava un metodo d' impedire i lunghi arresti e gli enormi coacervamenti nel tubo intestinale, e con tal mira propose l'uso di qualche purgativo e specialmente delle solite pillole tartaree dello Scrodero combinate con l' oppio. Se questo avesse potuto tenere a freno lo spasmo, si lusingava egli che i purgativi avrebbero avuto campo di produrre l' effetto o si avrebbe potuto aumentare le dosi al segno di doverlo produrre. Intanto stimò conveniente le bevande gelate, giacchè gli altri corroboranti, egualmente che la stessa più gentile infusione o decozione di china, non erano tollerati dallo stomaco.

Erano placidamente scorsi quattordici giorni senza alcun movimento del turgido ventre quando fu dato principio al nuovo metodo. La dose delle pillole da 12 o 14 grani fu portata gradatamente ai sedici, ai venti, ai ventiquattro, ai trenta grani, e finalmente all' intiera dramma senza effetto. L' oppio dai tre quarti di grano fu a gradi accresciuto in modo che non producesse soverchia sonnolenza. Ma l' oppio nulla più operò che addormentare nel momento l' irritazione del purgativo, e l' infermo aveva già in corpo dugento cinquanta grani dell' ultimo senza il minimo sgravio. Fu pertanto riconosciuta l' inutilità, anzi il manifesto pericolo di ulteriore insistenza. Infatti oltre ad essersi rinnovati i dolori, e sti-

ramenti della solita gamba, partecipò dell' incomodo ancora l'altra, e l'agitazione si comunicava talora anco alle braccia, il ventre era sempre più turgido, i tormini frequenti, gli stimoli quanto inutili, altrettanto acerbi, le orine soffrivano dell'incaglio, non erano rese che con dolore e ardore, ed erano scarsissime ed oscure. L'oppio in dose di un sol grano con otto grani di assa fetida era del tutto inefficace, ed anzi convenne presto abbandonare l'assa fetida per la molestia che recava, ed incorporare l'oppio al diascordion. Quindi il male prese sempre più il carattere di una colica flatulenta, i dolori e gli stimoli divennero più frequenti e crudeli, ed eccessiva la dilatazione del ventre prodotta dagli sviluppi di aria, talchè non serviva stringere strettamente con fascia tutto il basso-ventre per contenerne gli effetti. In queste lacrimevoli circostanze altro non era permesso che fare la mattina una leggierissima doccia intestinale con l'acqua pura, e nel giorno far eseguire all' infermo una lunga gita in legno a ruote di trotto forzato, che serviva a rendere più rari e soffribili i dolori, e la sera darli una dose di oppio, che non giunse a produrre qualche sensibile effetto se non quando fu portata a due grani e mezzo ed a tre grani per sera. Ridotti a questo sistema, al termine di giorni ventinove si cominciò a vedere qualche sgravio di ventre unitamente ad esplosioni indicibili di aria specialmente per la parte inferiore. Oltre la frequenza ed insoffribile veemenza degli stimoli richiamò questa volta l'attenzione la qualità delle materie, fluide contro il solito, e simili a quelle che sogliono costituire gli scioglimenti di ventre. Io non dubitava punto che in ciò non si dovessero ravvisare gli effetti dei purgativi inutilmente ingozzati molti giorni innanzi. Affinchè gli stimoli accennati si rendessero tollerabili e le evacuazioni fossero più abbondanti bisognava esser liberali nell'uso dell'oppio. Non vi era da temere che tre grani e più di esso inducessero soverchia sonnolenza, o producessero qualche altro cattivo effetto. L'attività di questa dose oltre a rendere più soffribile e conferente la doccia intestinale necessaria per conseguire le evacuazioni, nel resto non giungeva a più che a conciliare quel moderato sonno, comune a tutti gli uomini e senza di essa impossibile. Era poi un fenomeno curioso ed istruttivo l' osservarsi che nel tempo di veglia l'uscita delle materie era al sommo dolorosa, difficultosa, e scarsissima, ed al contrario nel tempo del sonno era copiosa e senza incomodo. E quì avvertirò una volta per sempre, che dal principio di questi nuovi straordinarj travagli rarissime volte accadeva che l' infermo potesse rendere le materie intestinali sedendo al comodo. Per facilitarne l'espulsione egli quasi sempre era obbligato a collocarsi bocconi nel letto e comprimere fortemente il basso-ventre; avendo osservato che questa situazione contribuiva a

pro-

produr qualche scarico allorchè sopraggiungevano gli stimoli o che rendeva enormi masse di aria. Avvertirò pure che oltre alle diligenze dirette a promuovere l' uscita più facile e pronta delle materie, richiedeva ancora dei soccorsi, i quali non si mancava di apprestare, l' insigne flatulenza del ventre. Essa veniva calmata o determinata ad uscire dalle acque carminative ed in modo particolare dal liquore anodino minerale dell' Hoffmanno, il cui uso abituale in queste angustie eraglisi reso della più gran necessità per trovare dei momenti di sollievo. Colla precauzione di andare e starsene in campagna a tutta giornata l' afflitto Don Camillo dopo più giorni di atroci stimoli e di continui sgravj ebbe il vantaggio che malgrado la continuazione degl' incomodi, per altro minori, poteva prendere qualche cibo e gustarlo. Intanto le materie si restituirono quelle, che suolevano essere in quello stato che poteva dirsi di salute, e contemporaneamente diminuirono sempre più i dolori e le esplosioni di aria con aumento e successivo ristabilimento dell' appetito. A questo termine un solo grano di oppio conciliava un sonno più profondo di quello indotto precedentemente da tre e più grani. Allora fu sospeso intieramente questo rimedio senza pregiudizio del consueto riposo e delle altre funzioni del corpo, continuandosi soltanto con la doccia, col moto forzato in vettura, e colle bevande gelate.

Il fiero descritto travaglio, che accompagnò lo sgravio di un arresto straordinarissimo di materie, non rimosso, ma reso maggiore e più ostinato dall uso dei purgativi ancorchè combinati con l'oppio, facendo toccar con mano che la difficoltà delle evacuazioni cresceva a misura della violenza dello spasmo e che per conseguenza nulla era più valevole a diminuire l' ostacolo e promuovere gli sgravj, quanto l' uso generoso dell' oppio, doveva ormai illuminare chicchesia intorno all' evidente pregiudizio di tutte le cose dotate di qualche stimolo, finchè non fosse riuscito di togliere di mezzo la causa di questa stravaganza. Era fin d' allora mio pensiero, nè mai avea lasciato di protestarmene, di sospendere tutto quello ove potesse cadere soltanto in sospetto la facoltà di mantenere o eccitare la spasmodia nervosa, contentarsi del moto, dei gelati, ed all' opportunità dei placidi corroboranti, attendere il più dal tempo e dall' uso modesto dell' oppio alle occasioni, almeno fino alla cessazione di questo nuovo aggiunto. Ma fu d'uopo piegare all' altrui sentimento ed alla fiducia che si aveva nell'acqua dei Bagni di Montecatini usata per doccia alla sorgente.

Appena dunque Don Camillo fu in stato d' intraprendere il viaggio, cioè il dì 5 Agosto, partì a quella volta. Ivi per quanto la doccia fosse ricevuta senza sconcerti e forse sul principio procurasse qualche sgravio, pure è certo che al più dopo le prime volte ogni

evacuazione reſtò sospesa. Intanto si osservava crescere a gran passi il dimagramento della sua macchina nè profittarsi nell' appetito secondo il solito negl' intervalli degli sgravj, ed all' oppoſto continuare i soliti sviluppi di aria, quantunque fossero essi tenuti a freno dall' immersione nella ſteſsa acqua termale, rinascere per conseguenza dei tormini; ai quali effetti concorrevano senza dubbio i calori insoffribili della ſtagione e del luogo. In tempo del viaggio per il ritorno si suscitò un nuovo accesso di dolori e tornò in scena il dolore e stiramento delle gambe. E giunto in Siena, essendo ſtato in mia assenza secondo il convenuto continuata la doccia con acqua del Tettuccio allungata, lungi dal vedersene lodevoli effetti, si riprodusse la difficoltà e l'ardore nel rendere le orine. Le bibite frequenti di emulsione di gomma arabica ed altre simili a nulla valsero per mitigare i gravi incomodi provenienti dall' ultimo sintoma, il quale non cedè che unitamente agli altri all' occasione del nuovo sgravio procurato dai bagni domeſtici e dalla doccia di acqua pura e favorito dall' uso dell'oppio.

Ritornando per pochi iſtanti sopra la serie degli sconcerti nati in Don Camillo per conto della sua difficoltà a sgravarsi del ventre si vedrà che egli non solo in tempo dei suoi più acerbi travagli, ma qualunque volta cadeva il periodo dell' evacuazione inteſtinale, ancorchè si eseguisse senza gravi diſturbi, era solito trovarsi nauseato e impotente a prender cibo; che al contrario negli intervalli, purchè non vi fosse naturalmente o artificialmente veruno incitamento allo sgravio, nè si presentasse in grado considerabile veruno di quegli sconcerti del basso-ventre soliti accompagnare le evacuazioni, godeva di un buon'appetito, era piuttoſto avido di prender cibo, e si eseguiva perfettamente la nutrizione del suo corpo. E' da credersi, perchè è accaduto così coſtantemente, che se negli ultimi intervalli indicati non si fossero adoperati rimedj purgativi e ſtimolanti, queſta sua consuetudine non avrebbe sofferto cangiamento; egli in queſto tempo avrebbe mangiato con guſto e si sarebbe nutrito, ed inoltre, a mio parere, avrebbe meno sofferto all' occasione del travaglio che accompagnava le evacuazioni, l'affezione spasmodica non si sarebbe a tal segno inasprita, i periodi degli sgravj non sarebbero ſtati sì diſtanti, o almeno non tanto tumultuosi, e dolorosi, nè da sì gravi accidenti accompagnati. In vece, sempre medicato con purgativi, con cliſteri, con acque minerali, sempre in conseguenza irritato e tenuti in iscompiglio il ventricolo e gl' inteſtini, non permettevagli l' inappetenza e la nausea di prendere il conveniente alimento o sforzandosi a prenderlo l'assiduità dei dolori impediva che si convertisse nel necessario nutrimento. Tenuto adunque in queſto critico ſtato quasi continuamente dagli ultimi di Aprile al Settembre dell'accennato anno 1793, non è ma-

raviglia

raviglia se era ridotto al massimo grado di dimagramento e di debolezza. Per queste pressanti ragioni se prima mi era fatta costantemente una premura di porre in veduta questi riflessi appoggiati ad una lunga esperienza, da quest' epoca vi insistei con fermezza e mi dichiarai contrario per massima a qualunque metodo atto ad irritare il tubo alimentario e ad eccitarvi i consueti disturbi e tumulti, specialmente negli intervalli di calma riservati al nutrimento dell' individuo ed alla conservazione delle forze. Io voleva limitare per allora le cure medicinali ad un esatto regolamento nel vitto cibandolo di sostanze leggiere e facili alla digestione ed insieme nutritive; ad ajutare la natura allo sgravio con la doccia intestinale tutte le volte che ai consueti indizj vi si mostrasse disposta; a sedare lo spasmo con l' oppio quando e quanto fosse necessario. Temporeggiando voleva attendere la favorevole occasione di ritornare con vantaggio all' uso dei corroboranti, adattandone la scelta alle circostanze, ed in fine anco a quello dei purgativi aloetici o altri adattati, giacchè non devo omettere che i troppo blandi, come la cassia, la manna, le conserve, i sciroppi e simili, erano stati sperimentati costantemente infruttuosi e pregiudiciali.

Questo sistema non potè tenersi fermo che in parte. Osservatasi l' emaciazione del corpo, non intese le vere cause, pensavasi che potesse operarsi la nutrizione dalla qualità succulenta dei cibi e non piuttosto dall' ottima elaborazione dei cibi più facili a digerirsi. Di quì le molte premure, onde si procurasse rinutrirlo e rinvigorirlo con sostanze molto nutritive e con brodi consumati. La conseguenza ne fu lo sciogliersi il ventre e l'eseguirsi anche questa volta gli sgravj con quei tenesmi atroci che gli han sempre accompagnati quando le materie dal consueto loro stato di semplice mollezza sono passate a quello di fluidità, i quali non furono nè punto nè poco raffrenati da schizzettature calmanti e demulcenti fatte per l' ano, ma solo col solito mezzo di promuovere le evacuazioni coll' uso interno dell' oppio a tre o quattro grani per sera. Dopo questa mal concepita esperienza si convenne di ritornare al primiero sistema di vita e di non più alterarlo.

Poco dopo profittando del passaggio per Siena del Ch. Sig. Giuseppe Vespa, che si portava alla Corte di Napoli, fu sentito il di lui parere. Egli credè che l' inazione degli intestini nascesse forse dall' inerzia della bile, ed approvando di valersi dell' oppio per tenere a freno l' affezione spasmodica, e diminuire l' ostacolo alle evacuazioni, propose di eccitare e tenere in vigore la facoltà espulsiva degl' intestini per mezzo del fiele bovino condensato, combinato con sapone Veneto. Subito che Don Camillo si fu sgravato spontaneamente intrapresi il metodo proposto dal Sig. Vespa, nulla alterando nel rimanente. L' uso di questi rimedj concorse con la villeggiatura,

leggiatura, la quale ogni anno erasi sperimentata favorevolissima. Dietro ai medesimi si approssimarono molto i periodi degli sgravj e non riuscirono così molesti e lunghi; ma fu osservato che erano annunziati e preceduti da stimoli al vomito e da vomiti di materie viscose; che questi stimoli del tutto straordinarj, comparivano talora anco negli intervalli, producendo qualchè sconcerto addominale, ma senza evacuazioni; che sospesi questi rimedj, ovvero surrogata la sola bile bovina, le evacuazioni furono più tarde, ma si eseguirono con pochissimo disturbo.

Intanto il nostro infermo non tormentato con veruna cosa atta ad eccitare dolori e stimoli, o a perturbare la digestione, prendendo il cibo con appetito e avidità, più leggiermente incomodato nel tempo delle evacuazioni intestinali, egli potè rinutrirsi e ricuperare le sue forze. Così niuna difficoltà comparve più nel rendere le orine, niun dolore o stiramento si riprodusse alle gambe o in altre parti; tolto infine l'uso del sapone disparve ogni propensione al vomito. Tutto si ridusse a non aversi il benefizio del corpo se non per lunghi intervalli ora maggiori ed ora minori, ma talora di 20 e più giorni, ed al mantenersi il ventre costantemente più o meno turgido, e tanto più inturgidirsi quanto più si accresceva il cumulo delle materie arrestate. E questa continua turgidezza del ventre fu l'ostacolo che nell'ultimo descritto corso di male non permesse mai più distinguersi quella tumefazione circoscritta dell'ipogastrio, che in altri tempi compariva e si accresceva a misura del ritardo degli sgravj.

Non potei che applaudire alle giuste premure del Principe Rospigliosi per la salute del suo primogenito se non contento di sentire mitigati i di lui travagli, e ardendo di desiderio di vederlo intieramente libero e, se possibil fosse stato, guarito radicalmente, volle che questa singolar malattia fosse presa in esame da varj dei più rinomati Professori di Toscana, che ne fossero determinate le cause, e fosse stabilito il sistema di cura più efficace e più sicuro. Anche i PP. Scolopj, ai quali è affidata la direzione del Collegio, e specialmente il P. Rettore Cosimo Peintinger, che in una maniera senza esempio si era prestato all'assistenza di questo illustre Giovinetto, esigevano che fossero fissate le massime concernenti il di lui regolamento sopra dati invariabili, onde la cura non dovesse, non solo essere continuamente ondeggiante, ma non esponesse l'infermo, come spesso era avvenuto, a maggiori sconcerti. Ne stesi pertanto una dettagliata relazione, presso a poco nei termini della fin quì riferita istoria, aspersa delle riflessioni, che ho esattamente conservate; e siccome la lunghezza e mutazioni del male e le varie opinioni dei Medici stati sino a quel punto interpellati, come anche l'oggetto, cui era diretto l'attuale esame, richiedeva di fis-

sare

sare l'attenzione dei Professori da consultarsi sopra varj soggetti, la cui soluzione conducesse a determinare in un modo decisivo e irretrattabile l' indole della cagione primaria della malattia, l'influenza delle cagioni subalterne, il prognostico, e il metodo curativo: quindi è che senza volere con ciò nè punto nè poco limitato il campo alle più luminose loro vedute, proposi ad un più speciale loro esame le seguenti questioni.

I. La causa predisponente alla malattia consiste ella in un vizio della digestione o della bile o anche di altri fluidi concorrenti alle funzioni del ventricolo e degl' intestini; ovvero in qualche particolare alterazione dei grossi intestini?

II. In qual parte dei medesimi intestini si trattengono e si accumulano le materie fecali? Stanno esse ammassate egualmente e indistintamente in tutto il tratto del cieco, del colon, e del retto; o vi esiste qualche parziale dilatazione, o qualche particolare ricettacolo?

III. Posta la dilatazione parziale, o il divisato ricettacolo in qual parte degli intestini esisterà? Apparterrà egli al colon, ovvero al retto dilatato in modo da dover salire e prodursi molto in sù fuori della pelvi, dando origine al sopra descritto tumore dell'ipogastrio, come fanno appunto la vescica e l' utero similmente cresciuti di volume?

IV. Esiste qualche ostacolo che si opponga alla libertà delle evacuazioni? Questo ostacolo in che consiste? Dipende da una causa organica e costante, ovvero da una causa avventizia, sebbene tenuta sempre in vigore dalla presenza delle circostanze atte a richiamarla?

V. Questo ostacolo dove risiede o dove si forma? Alla curvatura del colon o nel tratto del retto, o verso la sua inferiore estremità? Che cosa indicano a questo proposito gli stimoli o per meglio dire le dolorose contrazioni all' ano tanto più atroci, quanto l' arresto è più ostinato? Che cosa in occasione dei maggiori arresti e travagli la difficoltà e scarsezza delle orine?

VI. Quali parti vi esercita l'affezione spasmodica? Vi entra come causa, o come un semplice effetto del soverchio cumulo di materie negli intestini? La sua violenza nell'ultimo corso deve considerarsi come un complicazione del tutto nuova concorrente ad accrescere la difficoltà alle evacuazioni del ventre e i travagli, ovvero semplicemente come un aumento dei medesimi incomodi, che innanzi solevano accompagnare in più leggier grado l' esercizio di questa funzione? Quali rapporti vi hanno i dolori e stiramenti delle gambe?

VII. Questa malattia è suscettibile di una cura atta ad estirparla ed a ridurre il nostro infermo a godere del benefizio del ventre pres-

so a

so a poco così bene come la comune degli uomini? E quando non sia sperabile l'assoluta e perfetta guarigione, quale sarà lo ſtato che dovrà considerarsi come naturale in esso, ove perciò debbono esser diretti e fermarsi i medici tentativi tendenti a riſtabilirlo nel maggior grado di salute, di cui è suscettibile?

VIII. Qual siſtema di vita e di cura crederebbesi il più efficace ed il meno soggetto a inconvenienti per conseguire la guarigione radicale o almeno per condursi al miglior grado sperabile?

IX. Qual fiducia potrebbe aversi per queſto oggetto nella mutazione dell'aria? Ed in caso che si giudicasse opportuna una tal mutazione, a quale qualità di aria ed a qual soggiorno si darebbe la preferenza?

X. Qual metodo si crederebbe il più adattato, ottenuto che sia col precedente l'intento, per mantenere quel possibile migliore ſtato (VII.) e preservare dalle recidive?

Tale adunque fu il tenore della mia relazione e delle dimande che vi annessi, la quale consegnai al P. Rettore del Collegio Tolomei sotto il dì 7 Novembre 1793. Queſta relazione fu prima inviata d'ordine dei Genitori a due Medici dei primarj in Toscana, Bicchieraj Fiorentino e Presciani Aretino, degnissimi ambedue della loro fiducia, per la vasta e profonda erudizione e dottrina non meno, che per la consumata pratica e l'universale riputazione, di cui godevano. E poco dopo Don Camillo si portò personalmente da essi, accompagnato, come in tutte le altre sue frequenti gite, dallo stesso P. Rettore Peintinger, che avendolo sempre tenuto sotto la sua più speciale ispezione e vigilanza era in grado di soddisfare con esattezza a tutte le questioni e ricerche, che ai medesimi piaciuto fosse di fare in schiarimento dei loro dubbj, e delle cose nell'iſtoria contenute.

Non parlerò che brevemente del parere del Sig. Dott. Lorentino Presciani, poichè non mi fu comunicata che una sua Lettera del dì 9 Gennajo 1794 diretta al soprallodato P. Rettore, ove dichiarandosi che nulla doveasi intraprendere di grande nella ſtagione invernale allora corrente attese le troppo ignote cagioni del male, e l'attuale tollerabile ſtato di salute dell'infermo, in sequela della notizia datali che non si era riportato alcun manifeſto vantaggio dall'uso della gomma ammoniaco e della bile bovina, che in occasione del suo abboccamento col malato avea in voce propoſta, si limitava al progetto di surrogarvi nella sera immediatamente prima della cena l'uso giornaliero di due o tre pillole compoſte con quattro o sei grani di ottimo aloe succotrino unito al doppio di recente sapone di Venezia e di sale policreſto, e di continuare oſtinatamente in altro tempo in quello della bile bovina condensata.

Ma

Ma la dotta, profonda, ed elegante rispoſta consultiva del Bicchieraj, che allora comparve avendo richiamata a se una più speciale attenzione per essere in ogni sua parte categorica ed appagante, levò tutti dalla indecisione, e fece pender la bilancia verso il sentimento da esso adottato, che in fondo combinava perfettamente coi miei sentimenti, già abbaſtanza spiegati nella mia relazione. Io penso che non spiacerà di leggere allo ſteſso suo fonte il parere del Bicchieraj, che tanto più volentieri io pubblico, perchè intendo di dare con ciò un atteſtato della particolare ſtima che io professava a queſto degno soggetto, ſtato immaturamente rapito alla repubblica Medica, e di rendere un sincero omaggio all'amicizia, di cui mi onorava. Eccone pertanto il tenore.

§. 1. *La dettagliata istoria degl'incomodi che soffre S. E. Don Camillo de' Principi Rospigliosi, esaminata con ingenuità ed attenzione, presenta l'etiologia di una affezione organica dell'inteſtino retto o dell'eſtremità inferiore del colon esclusivamente a qualunque affezione morbosa idiopatica di alcuno degli altri visceri contenuti nella cavità dell'addome.*

2. *Baſta avvertire che fino dalla prima infanzia la difficoltà dello sgravio inteſtinale fu manifeſta in esso, e dovè superarsi col mezzo dello ſtimolo dei cliſteri, e che queſto ſtimolo, creduto allora necessario, valse a confermare piuttoſto la malattia che a superarla, per esser persuasi che la causa immediata di tutto lo sconcerto si riduce al difetto di eccitabilità nella sede sopra indicata.*

3 *Quali possano esserne ſtate le origini tanto è difficile a ſtabilirsi quanto inutile, giacchè una tal condizione soſtenuta da molti anni deve presumersi resa connaturale al viscere e superiore agli sforzi della medicina.*

4. *Non può sicuramente negarsi che la projezione in avanti del torace osseo manifeſta in queſto Signore, col ridurre i muscoli addominali di una maggior lunghezza, e singolarmente i longitudinarj, quasi alla giacitura di piani rettilinei, vale a dire senza sottesa, e in conseguenza senza la capacità di accorciarsi e di agire contro i sottopoſti visceri, non deva molto aver contribuito alla difficoltà dello sgravio delle materie fecali.*

5. *E' altresì indubitato che queſta prima difficoltà mediante il trattenimento delle materie escrementizie nell'ultima parte del cilindro inteſtinale deve essere ſtato uno de' più attivi elementi della ſtupidità ed inazione delle fibre musculari di esso, sia ciò in conseguenza della troppo continuata azione sopra le fibre sensibili ed irritabili di quella sede, o di una callosità indottavi dal concorso degli umori coagulabili ivi richiamati dal coſtante ſtimolo, di che non mancano esempj.*

6. *Se dopo una lunga sospensione degli sgravj fu coſtantemente osservato nel caso in queſtione uno scarico di materie in quantità ſtraor-*

 dinaria

dinaria privo della consistenza solita osservarsi nelle persone costituite in stato di salute, ciò indica che mediante l' ostacolo esistente nel fondo del tubo intestinale si accumulano le fecce, che appoco appoco elevate a varii livelli ivi col trattenimento acquistano l'attività di stimolare i grossi intestini non affetti dalla causa morbosa, o per la meccanica azione di un contatto che li distrae, o per un certo grado di acrimonia dovuta alla decomposizione delle materie suddette, o per lo sforzo ancora dei fluidi elastici sviluppatisi in tali occasioni.

7. *Che lo stimolo richiami alle parti animali il concorso di umori è cosa troppo conosciuta in medicina, e trattandosi degli intestini giustificata oltre ogni equivoco dall' effetto dei purganti, per opera dei quali si vedono trasformare in sostanze liquide le fecce più indurite dalle ostinate costipazioni.*

8. *Ciò posto bisogna avvertire che l' indicato stimolo delle materie fecali accumulate e degenerate per il trattenimento non può limitarsi alla superficie che ne soffre l' applicazione, ma deve secondo le leggi conosciute dell' economia animale propagarsi simpaticamente a tutte le parti che hanno fra di loro connessione per mezzo delle fibre sensibili o delle irritabili o di ambedue queste sorgenti della vitalità.*

9. *E' noto che i tenui intestini ed il ventricolo godono di questo doppio consenso con i grossi intestini, e tanto basta per non dubitare che la cardonimia, le contrazioni di tutto l'addome e le angustie solite presentarsi nel nostro soggetto agli ultimi periodi della sospensione degli sgravj, rilevino dalla connessione o delle fibre spirali irritabili o de' filamenti midollari che concorrono alla fabbrica di tutto il cilindro.*

10. *Le stirature alle braccia e gli altri moti convulsivi universali sembra per verità che devano la loro origine alla connessione dell' intercostale co' plessi brachiali e addominali, e da questa istessa connessione si dovrebbe dedurre l' ischiade e la stranguria, se la pressione degli intestini grossi aumentati di volume dalle materie fecali e dall' enfisema non assegnasse più immediata l' origine di tali sintomi.*

11. *Quanto finora è stato rilevato dai dati che somministra l' istoria pare che conduca a stabilire la proposizione fissata in principio, vale a dire che l' intestino retto o l' estremità inferiore del colon sono la sede della malattia, e che sarebbe una gratuita supposizione l'ammettere come idiopatiche tante affezioni dei visceri superiori dell'addome, quante ne accennano i segni introdotti dalla graduale accumulazione delle fecce ne' grossi intestini.*

12. *Conferma di tutto ciò essere ne possono i danni ritratti da quei rimedj che sono stati diretti ad accrescere la quantità della bile o a rettificarne la qualità, ad aumentare l' azione degli intestini superiori, ed a violentare il moto peristaltico per forzare l' espulsione delle fecce.*

13. *Pre-*

13. *Preso pertanto di mira il vizio locale pare che devasi assolutamente renunziare a tutti quei tentativi, che l'esperienza ha fatti conoscere dannosi all'universale della macchina, e che si debba dirigere ogni premura a limitare gli effetti di tal vizio, vale a dire a render più brevi gl' intervalli fra gli sgravj e minore in conseguenza l'accumulazione delle materie nel tubo intestinale, e sopprimere o almeno moderare in tal modo la sorgente agli sconcerti secondarj più tumultuosa negli effetti, se non più formidabile della cagione primaria.*

14. *Se adunque i purganti e gli stimoli dati direttamente agli intestini grossi per mezzo dei clisteri e delle docce di acque minerali sono stati negli ultimi tempi ritrovati dannosi e capaci di eccitare spasmo, conviene assolutamente abbandonarne la pratica. Se al contrario il fatto ha dimostrato che il moto di succussione o in vettura o a cavallo, il passeggio, la sospensione degli stimoli hanno migliorate le di lui circostanze nel tempo della sospensione degli sgravj e resi questi, se non meno distanti l' uno dall' altro, accompagnati almeno da inquietudini più moderate; che l' oppio, quando lo spasmo si è unito a ritardare questi sgravj, le immersioni nell'acqua tiepida, e la semplice doccia sono stati i più efficaci compensi per promuoverli, bisogna insistere in questo metodo, perchè altrimenti operando sarebbe un deviare con incerte innovazioni dalle traccie che la natura istessa suggerisce, ed un renunziare ai canoni più sicuri della clinica.*

15. *Il solo oggetto da proporsi in simili circostanze è quello sicuramente di estendere cautamente l' uso de' nominati compensi vantaggiosi col tentare se la doccia semplice continovata ancora dopo seguiti gli sgravj producesse l' effetto di diminuirne gl' intervalli, e con abituare il malato ai viaggi e all' equitazione libera in luoghi di aria elastica ed esente da umidità, ferma stante una dieta più vegetabile che animale, la tranquillità dello spirito, e l' allontanamento di ogni penosa occupazione.*

16. *Qualora da tal sistema di vita si trovasse diminuita l' atonia che gl' intestini devono aver contratta per le molte e lunghe distrazioni sofferte, facilitati gli sgravj, e abolita o moderata almeno la spasmodìa, il ritorno all' uso del ferro sperimentato utile in altri tempi o la bevanda delle acque acidule semplici o calibeate, o delle vetrioliche, è sperabile che conduca a degli utili progressi.*

I resultati di quanto sopra è stato esposto serviranno di replica alle questioni proposte in fine della relazione; e questi sono:

I. *Che le cause prodisponenti la malattia considerata nella difficoltà agli sgravj intestinali non consiste in difetto di digestione o degenerazione di umori, ma bensì in un vizio locale di uno dei grossi intestini (2, 11).*

II. *Che il primo trattenimento delle fecce segue o nel retto o nell' estremità inferiore del colon.*

 III. *Che*

III. *Che posto tale ostacolo allo scarico delle fecce, la dilatazione nella parte dell' intestino superiore a questo ostacolo è una necessaria conseguenza dell'aggruppamento delle materie fecali e dello sviluppo de' fluidi elastici, il primo esteso a tutti i grossi intestini, il secondo a tutto il cilindro, onde i tumori circoscritti che premendo i visceri adjacenti ne turbano le funzioni, come dimostra il ritardo delle orine, l' ischiade, gli spasmi, ec.* (6, 10).

IV. *Che vi ha tutta la ragione di credere attualmente organico il nominato ostacolo, predisposto dall' inazione dei muscoli dell'addome, e stabilito in progresso dall' ostinazione degli stimoli locali spontanei e procurati* (2, 3, 4, 5).

V. *Che la dilatazione degli intestini superiori al retto implicando accorciamento nella loro lunghezza, basta a spiegare le dolorose contrazioni dell' ano.*

VI. *Che l' affezione spasmodica, mera consequenza dell' eccessivo stimolo e delle varie pressioni, più o meno ha sempre vegliato secondo la maggiore o minore intensione delle cagioni che l'han prodotta* (8).

VII. *Che, non ostante la gioventù del soggetto in questione, pare assai lontana la lusinga di vederlo ridotto a godere del benefizio del corpo come la comune degli uomini, restando solo la probabilità che si abbrevino gl' intervalli degli sgravj in modo da evitare il grado di ferocia, a cui si elevarono i sintomi in varie occasioni e principalmente nella passata estate* (2, 3, 11).

VIII. *Che i compensi soprallodati, egualmente che il vitto più vegetabile che animale, per quanto non possano contribuire alla perfetta guarigione, vi ha tutta la ragione di sperare che siano bastantemente efficaci per trattenere i progressi della malattia e mitigare gli effetti.*

IX. *Che il più si deve attendere dall' attività della macchina, dal soggiorno in luoghi montuosi e di aria salubre in ogni rapporto* (14).

X. *Che solo dopo avere ottenuto un grado plausibile di vigore negli intestini debilitati può aver luogo la cura de' corroboranti da istituirsi con la medesima delicatezza e circospezione.*

ALESSANDRO BICCHIERAJ.

Da questa epoca si tacquero tutte le opinioni, le ipotesi, e giudizj arbitrarj sopra questa malattia, la quale fu senza ulteriori dubbj e contrarietà considerata come un vizio d'organizzazione costituito dalla straordinaria ed ampia dilatazione di una gran parte dei grossi intestini, in cui si apriva quel tratto dell' intestino retto che supponevasi conservare il diametro naturale e far le parti di emissario. Ciascuno fu convinto che gl' intestini aveano perduta l'at-

l'attività di espellere abitualmente e metodicamente le fecce, che si andavano raccogliendo nel vafto ricettacolo; che i rimedj valevoli ad eccitare l'azione degli inteftini non operavano che a danno, perchè risvegliavano una spasmodìa molefta ed accrescevano la difficoltà dello scarico con promuovere delle contrazioni violente, e spesso durevoli e coftanti all'emissario; che perciò il miglior partito si era di bandire per sempre dalla cura tutti i rimedj purgativi e confidare alla natura quasi intieramente l'esecuzione di quefta funzione, col concorso prudentemente regolato del conveniente siftema di vitto, dei mezzi atti a mantenere la macchina nel miglior tuono negl' intervalli degli sgravj, e dei sedativi, ogni volta che la spasmodìa inteftinale nel tumulto degli sgravj difficultava l'uscita alle fecce. Con tali massime Don Camillo si rimesse a poco a poco al vitto ordinario di uomo sano, coltivò coftantemente il moto a piedi, a cavallo, e in altre forme, fece talora uso di qualche tonico e soprattutto delle bevande e cose gelate, e sempre che il permetteva lo ftato tranquillo del ventre coltivò il bagno freddo in tutte le ftagioni e talora l' applicazione al bassoventre di pezze impregnate di acqua fredda ed anco gelata; ai tumulti prodotti dagli sviluppi d'aria allorchè gli sgravj erano meno felici si provvedeva con discreto uso di cose carminative e specialmente del liquore anodino minerale dell'Hoffmanno, ed alle dolorose contrazioni e ftimoli, che accrescevano la difficoltà, si opponeva una proporzionata dose di oppio. Ed in quefto semplice e regolare siftema noi fummo maggiormente confermati dopo che videsi che nel primo semeftre dell'anno 1794 i clifteri, le docce prima ai bagni di Montalceto, e poi a quelli di Monte Catini, ed altri simili espedienti continuavano a crescere i disordini, ed al contrario lasciato a se ftesso, sebbene gl' intervalli degli sgravj fossero talora molto lunghi ed una volta si protraessero a 42 giorni ed altra volta fino a giorni 45, pure quando l'arte non vi s' intruse, successero alfine gli sgravj placidamente e quindi spontaneamente si riavvicinarono. Ed allora fu che ebbesi il contento di vedere ridotto Don Camillo in quello ftato più plausibile, che permetteva l' indole della primaria cagione dei suoi incomodi giacchè si sgravava spontaneamente, e talora con pochissimo difturbo del deposito fatto a diversi intervalli, non però mai così protratti quanto nei due casi sopra enunciati, e previo sempre qualche sviluppo di aria, e l'ammollimento delle materie; lo che faceva conoscere il coftante metodo seguito dalla natura per venirne a capo. In tal modo Don Camillo ha vissuto tranquillamente per quasi quattro anni, abbaftanza contento del suo ftato, che permettevagli di accudire liberamente ai suoi ftudj ed ai suoi favoriti esercizj letterarj e ginnaftici.

Fu perciò grande la nostra sorpresa quando dopo lo sgravio di ventre compiuto in esso il dì 6 Ottobre dell'anno 1797, senza aver cangiato sistema di vita, senza alcun altra manifesta cagione, si osservò oltrepassarsi i soliti periodi, superarsi quelli di 42 e 45 giorni, che fino allora erano stati i più lunghi, trascorrere altro considerabile intervallo, comparire eccessiva la pienezza del ventre specialmente nelle due regioni lombari, e non muoversi intanto alcuna evacuazione. Indagando la causa di tanta pertinacia, credei ravvisarla nell'aumento delle orine. Supposi, che per l'accresciuta attività dei vasi assorbenti intestinali si mantenessero troppo asciutte le materie contenute nel vasto ricettacolo e non fossero in caso di concepire quella alterazione o quella specie di fermentazione, che ammollendole e mettendole in moto soleva produrne lo scarico. Altre volte io aveva notato che per ammollire efficacemente le fecce indurite e provocarne l'uscita giovava singolarmente l' introduzione dell'acqua pura per mezzo della doccia intestinale, e ad essa ricorsi senza indugio. Ma nell' esecuzione rilevai essere talmente contratti l'ano ed il retto, che se opponevano un'ostacolo superabile all' introduzione del sifone, della doccia, e del fluido, ne opponevano poscia uno insuperabile all'uscita dell' acqua introdotta. Questa era in vece prontissimamente assorbita e resa per orina. L' inefficacia dei tentativi con la doccia di acqua pura conduceva naturalmente a sostituire l'acqua minerale. Erano già state date le disposizioni per tentare alla sorgente la doccia delle acque minerali di Vignoni, quando l'enorme tensione del ventre e soprattutto la contrazione sempre più violenta dell'ano, e dell'estremità inferiore del retto obbligò a dimetterne il pensiero. Sopraggiunta indi una calma pensai di sperimentare i clisteri dotati della più piacevole attività espulsiva. Fu introdotto un semplice decotto emolliente avvalorato con l' olio di ricino. Altre volte i clisteri promovevano gravissimi disturbi; questa volta niuno fu il disturbo da essi recato, ma niuno pure l'effetto. Il fluido era reso per orina e il ventre rimanevasi nello stato primiero. Replicato e riuscito molte volte inutile un tal tentativo, dopo altre dilazioni non parendo potersi lasciare intentati senza colpa quei mezzi, che in casi estremi si reputano necessarj per determinare gl' intestini ad un più valido sforzo, al termine di giorni 65 di sospensione si volle sperimentare l' effetto di un clistere fatto con una leggiera decozione di tabacco, che ebbesi la precauzione di introdurre a piccole riprese a scanso di troppo gravi sconcerti. L'azione del medicamento eccitò validamente l'azione intestinale, ma non essendo avvenuto lo scarico, ne derivarono dei dolori per breve tempo. Il tabacco in seguito cagionò i soliti disturbi al capo ed allo stomaco, ma poichè furono essi svaniti, lungi dal vedersene alcun' effetto,

parve

parve al contrario che il basso ventre si componesse in una calma temporaria e fosse sempre più allontanata la speranza di una prossima evacuazione.

Allora, ad eccezione del moto o a cavallo o in vettura secondo che ha permesso lo ſtato dell'ammalato, e perfino di una corsa di molte poste, fu sospeso ogni altro tentativo finchè non nascessero maggiori disposizioni agli sgravj; tanto più che il malato medesimo ricusò di acconsentire all' uso dell' olio di ricino per bocca propoſto dal Ch. Sig. Dott. Massimi. Queſte disposizioni parvero prossime ottantadue giorni dopo l' ultimo sgravio. Eransi riaffacciati i segni di quella fermentazione delle materie inteſtinali solita annunziare le evacuazioni ed il malato provava degli ſtimoli con quella medesima sensazione che suolevano eccitare, allorchè altre volte riuscivano efficaci. Le orine rese più cariche e scarse pareva che rendessero probabile il buon successo. Ma poichè, malgrado tali preludj, il ventre mantenevasi chiuso, queſta circoſtanza determinò a sollecitarlo coi cliſteri. Non avevan' essi altro oggetto che di ammollire e sciogliere le materie fecali, e voleasi esclusa da essi ogni azione ſtimolante, tanto più che i tenesmi assidui aveano ormai confermato nell'opinione, che l' eſtremità inferiore del retto non fosse esente da vizio locale. Fu perciò scelta la decozione dei semi di fien greco, cui fu aggiunta porzione di ottimo olio comune. L'esito fu consolante. Il primo cliſtere fu reso al debito tempo non senza materie, e simile esito ebbero altri tre cliſteri ripetuti nel medesimo giorno coi debiti intervalli. Don Camillo era dai medesimi sollevato, gli ſtimoli dolorosi si mitigavano, l' uscita delle fecce si facilitava. Tre cliſteri dati nel dì seguente ebbero lo ſtesso evento, ed egual benefizio spontaneo ne seguì la notte susseguente. Il terzo giorno non fu ommessa l'amminiſtrazione di due cliſteri, ma le disposizioni erano cangiate. In mezzo agli ſtimoli non fu resa che la parte più fluida senza materie, e nella seguente notte non ne venne alcuno scarico spontaneo. Continuando nei dì seguenti le ſtesse circoſtanze non vi fu luogo a ripetere i cliſteri. Intanto dopo una pausa si accrebbero di nuovo le contrazioni dolorose all' ano ed al retto, si manifeſtò qualche temporaria difficoltà a rendere le orine, si accrebbe la massa dell'aria negl' inteſtini, e videsi la necessità di applicarsi con impegno a sciogliere quello ſtato spasmodico inteſtinale, che si riconosceva per attuale cagione di tanta oſtinazione. Fu fatto uso più generoso dell' oppio, ma inutilmente; furono prescritte injezioni nell' inteſtino retto con soluzione d'oppio, senza vantaggio; furon poſti in opera semicupj, vapori, bagni universali, e tutto indarno. Gli sviluppi d' aria crescevano, e si accumulavano princi-

palmente nelle parti superiori del ventre e distraevano enormemente il ventricolo, eccitando dei vomiti. Questa novità avendo posto in qualche giusta apprensione fu consultato il Sig. Dottore Giuseppe Lodoli P. Professore di questa Regia Università, che fu egli pure di parere non potersi in quell' istante avere altra mira che di sciogliere lo spasmo intestinale e doversi insistere quanto potevano permetterlo le circostanze sull' uso delle injezioni mucilaginose ed oppiate, del bagno, dei fomenti all' ipogastrio, dei clisteri emollienti ogni volta che fossero stati eseguibili, infine di tuttociò che direttamente o indirettamente potesse contribuire a questo importantissimo oggetto; ed acciò l'applicazione locale dell' oppio riuscisse più efficace si adottò il metodo di adoperarlo sciolto nel sugo gastrico. Ma nonostante la calma indotta da questi soccorsi e dai mezzi più idonei a procurare l' uscita dell'aria, dei quali ommettonsi i dettagli, nella sera seguente, cioè del dì 5 Gennajo 1798, fu di bel nuovo assalito l' infermo dalle solite angoscie prodotte dalle gran masse di aria sviluppantisi negl' intestini, che non trovando esito andavano a coacervarsi nel ventricolo e vi producevano distrazioni dolorosissime e quindi talora esplosioni di aria violente spesso accompagnate dal vomito. In questo stato i polsi concepirono una celerità febbrile, le orine divennero molto cariche e fosche, e l' infermo cadde nelle maggiori smanie che avesse mai provate; a calmare le quali, essendo state inutili le consuete diligenze, contribuì nella notte una presa di due grani di oppio, per la cui azione fu agevolata all'aria l' uscita. Nella seguente mattina gradì la bevanda ghiacciata che fino a questo tempo aveva aborrita, ed anche le injezioni oppiate riuscirono di molta utilità, perchè sollecitavano l' espulsione dell' aria. Da questo giorno il punto più distratto del basso-ventre era la regione lombare destra lateralmente ed anteriormente sotto le coste spurie, d'onde diramavasi un doloretto fino alla scapula. Giunse allora un parere dell'Archiatro Sig. Dottore Giuseppe Petri, di cui gli afflitti Genitori aveano richiesto il consiglio in sì lacrimevoli circostanze, nel quale progettavasi l'applicazione delle sanguisughe ai vasi sedali, e nel caso che restasse diminuita l'angustia dell' ano si proponeva l' uso della supposta, e si esortava l' infermo al tentativo dell'olio di ricino. Furono pertanto applicate cinque sanguisughe alla accennata parte che procurarono un sufficiente sgravio di sangue, senza vantaggio; ma non si potè fare uso della supposta, di cui in altro tempo erasi fatto sinistro esperimento, nè dell'olio di ricino, cui ostò la ripugnanza assoluta del malato.

La febbre nei dì seguenti continuò ad accompagnare la malattia con smania, sete, affannetto, e inquietudine di stomaco, e con sudore nella declinazione. Tuttavolta nel dì 8, Gennajo cominciò

ciò a rendere spontaneamente delle materie fecali, egli diceva di sentire delle disposizioni all' evacuazione, cosa da esso proferita per la prima volta dacchè trovavasi in questo travaglio, e poichè si era sciolta quella molesta serratura di stomaco, era il ventre più molleggiante, e l'aria più liberamente ne usciva, la sete inoltre si era mitigata, continuava il sudore, i polsi erano sciolti ed elevati, le orine fosche e facili; tali apparentemente plausibili circostanze nutrivano ancora delle speranze. Di fatto in questo giorno e nei seguenti furono evacuate molte materie, ajutate da bibite di brodo caldo e dalle solite injezioni nel retto, e le cose procederono plausibilmente fino al dì 10 dello stesso mese. Ma in quel giorno l'aria che nel movimento delle materie si svolgeva in masse enormi soffrì un incaglio all'uscita, ed essendosi coacervata nel ventre cagionò in esso molta tensione e tumulto, e specialmente delle violente distrazioni al fianco destro con dolori atrocissimi e con stiracchiature al petto. Avendo continuato a sgorgare le materie fecali in questo e nel seguente giorno, se riducevansi a calcolo quelle finora evacuate, la quantità ne era ormai cospicua; ma era essa tutt'ora molto scarsa se si riferiva al lungo periodo di sospensione; essendo mancato quello sgravio copioso che in altre occasioni succedeva agli sgravj minori ed apportava la perfetta liberazione. Quindi non è maraviglia se i travagli non erano quietati dalle evacuazioni, se non che temporariamente, e più in ragione dello sprigionamento contemporaneo dell'aria, che della mole delle materie evacuate, e se le circostanze dell' infermo continuavano in realtà ad essere infelicissime.

La seguente giornata ed ultima di sua vita fu passata plausibilmente, quantunque grande si mantenesse la tensione del ventre. Nessuna cosa fino alla mezzanotte dava indizio di sinistri prossimi accidenti. Egli aveva rese le orine senza difficoltà, i suoi polsi erano febbrili, piccoli, ma non più del dì precedente, la sua respirazione era naturale. Alla mezza notte nuovamente si accrebbe la distrazione del ventre e i dolori resi sempre più atroci messero l'infermo nelle maggiori smanie. Niente bastò a ricondurre la calma. Con le schizzettature replicate ebbe nuovi scarichi di materie fecali, ma senza frutto; non giovarono le fomente fatte alle diverse parti del ventre indicate dal malato, non le dosi di oppio replicate, non i varj carminativi, dai quali in altro tempo soleva ritrarre temporario sollievo. Malgrado questa sua infelicissima situazione e la maggior debolezza dei suoi polsi, egli conservava molte forze. Quindi fu in grado di levarsi dal letto e prendere varie situazioni, colle quali lusingavasi meglio promuovere la sortita dell'aria, e riuscì a fare dei passi per la camera ed a starsene qualche tempo in una sedia senza provare nè aumento d' incomodi, nè sentimento di debo-

 lezza.

lezza. In queste angoscie continuò Don Camillo fino alle ore sei della mattina, dando molto timore sull' esito del suo male, ma senza indizj di prossimo fine. Allora cominciò a mancarli il respiro, si resero i polsi più piccoli, deboli, e celeri, ma era intieramente preclusa la sortita dell'aria, che distraeva enormemente il ventre. Conservava nulladimeno la sua presenza di spirito e molte forze a segno di potersi sollevare col corpo senza altrui ajuto e tenersi sopra le ginocchia ed i gomiti, affine di tentare di espellere l'aria racchiusa nel modo che eragli riuscito in altre occasioni; ma trovando vano ogni suo sforzo, dimandò spontaneo che gli fosse amministrata l'estrema unzione. Dopo tal funzione, cui si prestò con singolar coraggio e rassegnazione, il respiro si rese viepiù impedito e mancante, i polsi caddero nel massimo languore e assunsero i caratteri del polso dei moribondi, e così alle ore sei e minuti 55 terminò la sua vita questo illustre giovane, degno certamente di miglior sorte e per la sua dolce ed ammirabile indole, e per i costumi illibati, e finalmente per quella sua rara docilità e rettitudine, di cui era esempio e modello ai suoi compagni.

Un caso così straordinario esigeva che se ne investigassero accuratamente le cagioni con l'apertura del cadavere. Fu pertanto eseguita la mattina del dì 12 Gennajo, ore 25 ½ dopo la morte. V' intervennero meco il Sig. Dott. Giuseppe Lodoli Medico consultato ed il Chirurgo del Collegio Sig. Carlo Sticotti; ed il Sig. Dott. Antonio Mattei pubblico Dissettore dell' Università fu incaricato dell' operazione con l'ajuto del Giovine studente Chirurgo Sig. Bernardino Cerpi. Si compiacquero assistervi i Sigg. Paolo Mascagni Lettore di Anatomia in questa medesima Università, Niccolò Semenzi Lettore di Medicina teorica, e Anastasio Gambini Chirurgo Infermiere del Regio Spedale e Professore d'Ostetricia.

Prima dell'apertura fu osservato tutto il basso-ventre egualmente ed estremamente dilatato e teso, talchè premendolo compariva duro come il marmo. Siccome durante la vita del soggetto si distinguevano all'occhio ed al tatto varie parziali gibbosità e ineguaglianze indicanti l' ineguale figura e distrazione degl' intestini, nè mai antecedentemente il basso-ventre si era condotto a questa uniforme ed eccessiva tumefazione e tensione, la quale fu soltanto scoperta alcune ore dopo la morte, fu unanimemente giudicato, prima ancora di procedere alla sezione, che tal cangiamento fosse nato dalla rottura degli intestini accaduta subito o poco dopo l'estinzione della vita, e dal passaggio dell'aria dalla cavità degli intestini in quella dell'addome.

Fatto quindi un taglio longitudinale nelle parti continenti dell' addome fino al peritonèo, innanzi di aprire questa membrana fu essa incisa in un sol punto affine di farne uscire l'aria graduata-

mente

mente. L'aria ne uscì subito con grandissimo impeto, talchè non riuscì accoſtarvi una fiaccola accesa per assicurarsi se fosse aria infiammabile. Ripetuta però l'esperienza quando le esplosioni erano divenute minori ed interrotte, si osservò che queſt' aria, a misura che si sprigionava, concepiva fiamma nel modo che segue del gas idrogeno non puro.

Aperta successivamente la cavità dell'addome si offerse alla viſta uno spettacolo del tutto nuovo e singolare, che eccitò la comune sorpresa. Consisteva la novità nell' essere occupata tutta la parte anteriore della cavità immediatamente sotto alle parti continenti, o sia le tre regioni epigaſtrica, ombelicale, ed ipogastrica comprese le parti loro laterali, cioè gl' ipocondrj, i lombi, e gl' ilii, dagli intestini colon e retto accresciuti ſtraordinariamente di diametro e capacità, e diſpoſti in queſta parte mediante varii giri e tortuosità giammai finora osservate o descritte.

Il colon partendo dall' inteſtino cieco collocato presso a poco nell' ordinaria sua sede (ved. la fig. Tav. XIII.) faceva subito una corta voluta nascoſta sotto la curvatura iliaco-lombare deſtra del retto e la parte deſtra della terza porzione di queſto medesimo inteſtino, che in appresso verrà descritto. Qui fra l' indicata parte del retto ed il colon, con discoſtare il retto, si osservò qualche porzione di materia ſtercoracea ſtravasata, tolta la quale al principio appunto del colon vicino alla valvula del Bavino si resero visibili tre piccoli fori comunicanti con la cavità del basso-ventre, ove le tuniche dell' inteſtino non avevano concepita alcuna morbosa alterazione ed erano piuttoſto assottigliate. Indi il colon si ripiegava sopra il cieco e di più saliva quasi verticalmente per la region lombare deſtra fino alle cartilagini delle coſte spurie, facendo in queſto luogo colle dilatate sue celle varie insigni protuberanze verso la parte eſterna e alquanto poſteriore dell'addome, e senza fare alcuna voluta nel deſtro ipocondrio, piegato in arco ed occultato in parte nei lati sotto le coſte spurie, passando a traverso dell' epigaſtrio un poco obliquamente dal basso in alto e dall' avanti all' indietro, si portava nell' ipocondrio siniſtro, ove piegava verso la parte posteriore e scorrendo sopra il rene siniſtro scendeva nel lato siniſtro della pelvi. In questa parte, in vece di formare le due piegature che coſtituiscono il così detto S romano rovesciato del colon per terminare nel retto all' ultima vertebra dei lombi, seguitando la curva dell' ilio, piegava verso la parte eſterna inferiore della regione iliaca siniſtra, ove, fatta una curvatura, con cui si volgeva sulla parte anteriore della ſtessa regione immediatamente sotto le parti continenti, aveva il suo termine. Queſto inteſtino in tutto il suo corso era eſtremamente dilatato, le sue celle erano molto più protuberanti che nello ſtato naturale, il suo

colore rossiccio per essere i suoi vasi sanguigni così turgidi come se fossero ſtati artifizialmente injettati, o come attaccati da un grado di universale infiammazione; qualità che competeva egualmente a quel reſto dei grossi inteſtini che manca a descriversi.

Dal punto sovraccennato, a cui era ſtato fissato il termine del colon, perchè le fibre componenti le tre sue fasce ligamentose andavano quì dispergendosi equabilmente su tutta la periferia, e quì pure cessavano di comparire le celle e internamente le valvule, aveva il suo principio l'inteſtino retto. Al retto perciò appartenevano tutti i susseguenti giri e tortuosità dell' inteſtino crasso situato per la massima parte nella parte anteriore del ventre, il quale per comodo può diſtinguersi in quattro porzioni e tre gran curvature.

La prima porzione dalla parte anteriore della regione iliaca siniſtra, ove terminava il colon, piegando dolcemente in arco all'ingiù verso il pube, si portava quasi orizontale nella regione iliaca deſtra, e dopo averla trascorsa intieramente si ripiegava in alto sopra se ſtessa, facendo la prima gran curvatura, che chiamerò la curvatura iliaca deſtra. Il diametro di questa porzione era tre pollici parigini e 4 linee, e la total sua lunghezza per linea retta dal principio del colon fino alla sua eſtremità deſtra poll. 9 $\frac{1}{2}$ e secondandone la curva poll. 12.

La seconda porzione salendo obliquamente da deſtra a siniſtra per la regione ombelicale giungeva fino alla parte esteriore ed anteriore della regione lombare. Per tutta la lunghezza della prima porzione giaceva sopra la sua parte superiore ed anteriore e successivamente sopra il fine del colon, e per il rimanente aveva il suo appoggio sul fianco siniſtro. Il suo diametro nella parte media era poll. 5 e lin. 3; la sua lunghezza totale per linea retta poll. 12 e secondo la sua curva poll. 15.

La terza porzione nasceva in conseguenza della gran curvatura lombare siniſtra dell' inteſtino. Essa era collocata fra la seconda porzione del retto, su cui giaceva, e la grande arcata del colon. Colla sua parte più elevata situata a siniſtra si produceva alquanto nell' epigastrio, e di quì scendendo obliquamente dall'alto al basso e dall'avanti all' indietro si conduceva sul confine della regione lombare destra colla regione iliaca fino alla parte interna del cieco ove ha principio il colon. Il diametro di questa porzione era poll. 5 e lin. 4; la sua total lunghezza in retta linea poll. 9 e lin. 5 e secondo la sua curva poll. 14.

Finalmente la quarta porzione nasceva per la ripiegatura iliaco-lombare al termine della terza porzione. Laddove l'angolo delle altre curvature, nelle quali l'intestino si ripiegava sopra se stesso, era molto acuto, in questa era quasi retto; poichè l' intestino, occul-

occultandosi quivi sotto la sua seconda e prima porzione cessava di essere visibile senza levar quelle di sito, e scendendo in giù obliquamente da destra a sinistra dall'avanti all' indietro si portava nel mezzo della pelvi, e di quì nella piccola pelvi, di cui occupava esattamente tutta l' apertura superiore e tutta la capacità fino al podice, obbligando la vescica, vuota di orina, a salire al di sopra delle ossa del pube. La lunghezza di questa porzione fu risconrrata poll. 19.

La somma delle dimensioni prese separatamente nelle porzioni superiori del retto, per quanto esatte, non potevano rappresentare con precisione la vera lunghezza di tutto il canale. Furono esse perciò ripetute in tutto il tratto dell' intestino crasso levato di sito e furono trovate come appresso:

	piedi	poll.	lin.
Lunghezza del colon pieno unitamente al cieco piedi	4	3	6
Lunghezza del retto similmente pieno	3	10	—
Totale dell' intestino crasso pieno piedi	8	1	6

Poco diverse furono queste misure nell' intestino levato di sito e vuoto:

	piedi	poll.	lin.
Lunghezza del colon e cieco . . . . piedi	4	7	6
Lunghezza del retto	4	—	—
Totale . . . . . . piedi	8	7	6

Dai quali confronti apparisce che sebbene l' accrescimento di diametro fosse in qualche modo comune al colon ed al retto, l'accrescimento in lunghezza apparteneva esclusivamente al retto, il quale, attesa la protrazione della sua linea ad una lunghezza almeno quadrupla dell' ordinaria ed il suo eccessivo aumento di diametro e capacità, aveva dovuto formare le diverse tortuosità nel ventre e farsi luogo nelle regioni ipogastrica e ombelicale ed estendersi fino alla regione epigastrica. Così la lesione organica apparteneva privativamente al retto.

Ma innanzi di levar di sito gl' intestini grossi piacque osservarne il termine all'ano. Quì è d'uopo osservare che l'ano per l'intiero corso dell' ultimo periodo della malattia, siccome ancora in altre precedenti simili circostanze, ſtavasene del continuo in iſtato di validissima contrazione, talchè spesso ricusava di ammettere il sifone sì della canna da cliſteri, che di quella assai più tenue da injezioni, per introdurre il quale conveniva cogliere l' iſtante d'un passeggiero rilassamento, e che similmente l' eſtremità del retto

era

era afflitta da spesse molestissime contrazioni, che talora non lasciavano di opporre all'introduzione del sifone insuperabile ostacolo, ancor quando lo sfintere dell'ano era aperto e dilatato. Non fu perciò senza maraviglia quello stato di considerabile rilassamento e dilatazione del podice che si osservò nel cadavere, ed il vedere come le materie stercoracee ammassate nel retto discese fossero fino al podice stesso, talchè dopo morte ne fossero fuora uscite varie glebe. Ma ben tosto la ragione ne fu manifesta. Durante la malattia l'aria sviluppata e condensata stavasene racchiusa negl' intestini e dilatava le tre prime porzioni del retto assai più che non lo erano nel cadavere. Queste tre porzioni riposavano una sopra dell'altra, ed essendo invariabile la base, su cui giaceva la prima, perchè formata dalle ossa del pube ed iliache, quindi è che ingrossandosi elleno e notabilmente crescendo il respettivo loro diametro, necessariamente erano obbligate a salire in alto, e sollevarsi nel ventre in cotal modo che la terza porzione sovrastante alle due prime dovesse, cedendo loro il luogo, andare ad occuparne uno più elevato su nell'epigastrio. Per le quali azioni riunite dovea portarsi più in alto nella region lombare anco la curvatura iliaco-lombare destra del retto e trar seco in su con forza tutta l'ultima porzione che da tal punto sino al podice stendevasi; e da questa cagione avea senza dubbio origine quel senso di stiratura all'ano, di cui spesso l'infermo solea rammaricarsi, e quelle violente contrazioni dello sfintere e dell'estremità del retto che ne erano conseguenza. Allorchè poi l'aria, fattasi strada pel lacerato intestino, venne ad occupare la cavità addominale e ad accumularvisi, cessò la causa che forzava il retto a sollevarsi nel ventre, e l'aria che prima esercitava il suo elaterio nel dilatare la capacità intestinale, dovè agire in senso opposto e fare una forte pressione sull'esterna periferia degl'intestini, tanto maggiore, quanto più ne cresceva la condensazione, e spingerli al basso a proporzione. Così l'ultima porzione del retto dovè progredire nella piccola pelvi, sciogliersi la stiratura all'ano, ed invece formarsi all'estremità del retto una specie di procidenza, rilassarsi lo sfintere, ed essere l'ano spinto all'infuori. Ai quali cangiamenti nulla più si opponeva dopo la morte, che anzi tutto contribuiva a favorirli sì per la cessazione di ogni reazione, che per quello stato di totale rilassatezza e risoluzione indottavi da un certo grado di mortificazione indicata dal fosco e livido colore che occupava il giro dell'ano.

Nel vuotare poi l'intestino crasso dalla materia stercoracea, di cui era turgido, si tenne conto del peso, che ascese a libbre 26. Questa materia quanto era situata più d'appresso all'estremità inferiore del retto, più perdeva i caratteri proprj della materia stercoracea, quale s'incontra nella comune degli uomini, e acquistava

le

le sembianze e le qualità di una materia terrea quasi senza fetore, o piuttosto di quel terriccio, a cui suol ridursi la materia stercoracea nei pozzi neri dopo aver percorso tutti i gradi di putrida fermentazione. E poichè siffatta specie di terriccio intestinale, che era il risultato della fermentazione e scomposizione sofferta dalla stessa materia nel tempo del suo lungo arresto negli intestini, era divenuto molto compatto e duro, specialmente nell' ultima porzione del retto, fu esso verisimilmente che nell'ultimo periodo formò quell' insormontabile ostacolo che soppresse le intestinali evacuazioni.

Venuti poscia ad aprire longitudinalmente i grossi intestini onde esaminarne lo stato e le interne offese si osservò che il colon, oltre ad essere al suo principio traforato nel modo suddivisato, alquanto più sotto, cioè sei pollici distante dal suo stesso principio, per un tratto ulteriore di sei o sette pollici era considerabilmente alterato nell' interna superficie, scorgendosi ivi del tutto lacerata, erosa, e mancante la tunica intima e la nervea, ed illesa soltanto la musculosa e quella che il colon riceve dal peritonèo. Tutta poi la circonferenza del colon ove risiedeva questa alterazione e nella vicinanza per non picciol tratto, eccettuatane quella parte del colon perforata, compariva infiammata, ingrossata, e indurita. La sede di questa insigne lesione era in quella parte del colon situata nella region lombare destra, ed occupava le più risentite protuberanze della sua parte esterna, che furono accennate. La valvula del Bavino era nel suo stato naturale, perciò capace di fare a perfezione il suo gioco per impedire il regurgito delle materie dal colon nell' ileo.

Altra offesa simile alla sopra descritta s' incontrò all' estremità inferiore del retto, di cui un tratto di dodici pollici era egualmente infiammato, ed insieme ingrossato e indurito nella sostanza; ed alla distanza di due pollici dal suo termine all' ano presentava una erosione circolare, che come quella del colon interessava la tunica intima e la nervea, ma eccedeva appena il diametro di un pollice.

Gli altri intestini, cioè i tenui, parte stavano riposti sotto il colon e le tortuosità del retto, dei quali ne compariva una porzione nel lato sinistro fra il colon e la curvatura lombare sinistra del retto ed altra nella regione iliaca sinistra tra la curvatura iliaca sinistra del colon e la stessa curvatura lombare del retto; parte poi eransi ripiegati al di sopra dell' epigastrio e negl' ipocondrj, ove avea loro fatto luogo il ventricolo ed il fegato, i quali si erano portati più in alto. Il ventricolo avea pur tratto dietro a se l'omento, che perciò era tutto nascosto sotto le coste al di sopra del colon, rimanendone visibile senza tagliare le coste spurie quella sola porzione che stava aderente al cieco ed alla parte destra del colon contigua alla parte esterna del cieco. A questa traslocazione avea

dato

dato agio la straordinaria curva ed elevazione della volta del diaframma, che producevasi fino alla seconda costa vera.

Gl' intestini tenui erano molto gracili, cioè di un diametro minore dell'ordinario e parimente il ventricolo di piccol volume. La lunghezza di questi intestini incominciando dall'orifizio superiore dello stomaco era piedi 20 poll. 11 e lin. 6. Così il totale della lunghezza degl' intestini dall'orifizio superiore del ventricolo fino al loro termine non eccedeva piedi 33 e poll. 7; la qual dimensione era appena il sestuplo della lunghezza di tutto il corpo di questo soggetto, considerata anche la detrazione della distanza dall'orifizio superiore del ventricolo al cominciamento del duodeno. E ciò prova che non ostante l' insigne allungamento dell' intestino retto non era punto aumentata la lunghezza totale degl' intestini.

Nell' ispezione degli altri visceri contenuti nell'addome, come ancora di quelli del petto, niuna cosa fu avvertita meritevole di special menzione.

Dopo il quadro della malattia ed i giudizj che vivente ancora il soggetto ne erano stati formati, che io mi sono studiato di fedelmente trascrivere, e dopo aver contemplato nel cadavere lo stato dei visceri, onde nascevano i singolari fenomeni, che nel corso di essa comparvero, non può dispiacere l' aggiunta di quelle riflessioni che possono servire allo schiarimento della diagnosi di siffatti incomodi ed alla spiegazione di molte interessanti e curiose questioni etiologiche e curative, che nel riandare e combinare la storia quasi spontaneamente si presentano. Nel che fare mi studierò di seguitare per quanto sarà possibile l' ordine dei quesiti proposti sino dall'anno 1793 per iscopo dell'esame dei Medici consulenti.

E primieramente niuno ormai vorrà mettere in dubbio che la causa predisponente non fosse intieramente collocata nella particolare originaria alterazione dei grossi intestini, ad esclusione di qualunque vizio della digestione o della bile, e degli altri umori concorrenti alle funzioni del ventricolo e degl' intestini. E poichè in secondo luogo si ricercava *in qual parte dei medesimi intestini si trattenessero e si accumulassero le materie fecali*; *se stassero ammassate indistintamente in tutto il tratto di essi*, *o se esistesse qualche particolare dilatazione o qualche particolare ricettacolo*? Si è ora saputo che l'ammasso facevasi nell' intiero canale grandemente dilatato, ma che il difetto maggiore e primitivo dovette avere origine nel retto, attesa non solo l' enorme sua dilatazione, ma più specialmente a causa della quadrupla sua lunghezza e delle tre curvature che era obbligato a fare nella cavità del basso-ventre per adattarvisi. E in tal modo trovasi pure la soluzione del terzo quesito, ove si ricercava *in qual parte degli intestini esistesse la* subodorata *dilatazione*, potendosi asserire perfettamente verificato quanto nel

quesito

quesito medesimo si proponeva ad esaminare, cioè che apparteneva realmente *al retto dilatato in modo*, almen fino dall'anno 1783, *da dover salire e prodursi molto in alto fuori della pelvi e dare origine a quel tumore circoscritto dell'ipogastrio*, che innanzi ai maggiori progressi del male distintamente compariva nei tempi di pienezza. Poichè sebbene la dilatazione siasi trovata comune al retto ed al colon, si può nondimeno tener per certo che quella del colon non fu che secondaria; dovendo essa avere incominciato ove cominciava l'arresto delle materie intestinali ed il loro coacervamento; lo che accader doveva nel retto, e solamente questo riempiuto dal luogo dell' arresto fino al suo principio farsi comune anco all'intestino superiore.

Qual fosse poi nel retto la cagione dell'arresto, o sia l'ostacolo che la produceva, non sarà difficile determinarlo quando si faccia attenzione alla natura della lesione organica, per cui recedeva dalla ordinaria figura e conformazione. Non è vero che gli ostacoli al libero progredimento delle fecce dal cieco all'ano consistano perpetuamente in strozzature, ingrossamenti delle tuniche, scirrosità, tumori, contorsioni degli intestini ec., che ne rendano considerabilmente angusta la cavità, e difficultino o precludano il passaggio alle indurite materie. Di tal sorta di organiche offese impedienti il libero sgravio del ventre e spesso cagioni di ampie dilatazioni, s'incontrano senza dubbio moltissimi esempj (1): ma oltrechè talora neppure gli ostacoli di questo genere bastarono a far sì che l'intestino al di sopra si dilatasse, sia perchè, per esser questa una operazione lenta, mancò il tempo ad eseguirsi, sia perchè alcune cause contribuirono a disciogliere le materie e sollecitarne l'uscita, sia infine per la mancanza di cedenza e distraibilità proporzionata delle tuniche; è poi certo che o non furono essi necessarj per produr questo effetto, o ne esistono di altro genere, che in un modo quasi insensibile conducono allo stesso fine. Così un certo calzolajo, di cui parla Samuele Formio in una sua osservazione riferita da Riverio (2), nel quale per un mese e più si era sospesa l'evacuazione intestinale e che usati indarno molti clisteri e molte pozioni purgative, alfine morì, avea gl' intestini tutti ripieni intieramente *instar sanquiculorum vulgo (bondins)* per l'arresto delle fecce ed anche degli alimenti e bevande prese; la qual cosa, non comparendo ostacolo alcuno evidente, fu giudicata conseguenza della abolizione della facoltà espultrice degli intestini. Ed in quel facchino, la cui storia riporta

Ll Ste-

(1) Beniven. *de abditis* c. 30. Ballon. *paradigm.* 30. Ruisch. *Observ. Anatomico-Chirurg.* 95 & 96 pag. 121 & seq. Tulp. *Obs. Med.* lib. III. obs. 2 Morgagni *de sed. & caus. morb. Ep. XXXII. n.* 6 e 7. ed altri da esso cit. n. 5.

(2) *Observ. comunicat.* a Sam. Formio *obs. XVIII.*

Stefano Blancardo (1), che dovette morire per non aver potuto sgravarsi del ventre per quasi cinque settimane, ancorchè non si avesse mancato di sollecitarvelo efficacemente per mezzo di catartici adoperati sì per bocca che per lavativi, con la sezione del cadavere furono trovati gl' intestini *farciminis ad instar* pieni d'ogni genere di cose da esso ingozzate, senza che si noti ostacolo alcuno, anzi attribuendosene dall' osservatore la cagione o a spasmo o a paralisia degli intestini. Ancora Pareo (2), trattando di quelle coliche abituali cagionate dalla lunga retenzione delle fecce, rapporta seccamente di un giovinetto di dodici anni, nel cui cadavere trovaronsi gl' intestini infarciti di secche e dure fecce, quali esso le rigettava per vomito avanti la morte, ove se fosse esistito un evidente impedimento non avrebbe certamente mancato di avvertirlo.

Ma poichè i casi surriferiti non presentano che esempj di tal soppressione delle evacuazioni intestinali, che spinse quei soggetti alla morte senza un previo noto sconcerto o abituale ritardo e difficoltà di questa funzione; queste circostanze possono vedersi amplamente combinate nei seguenti casi. Teodoro Zuingero (3) ha conservata l' istoria di un maniaco, che da più anni non evacuava il ventre se non dopo quattro, cinque, o più settimane, ed in cui l'addome si tumefece una volta enormemente per la retenzione senza perder l'appetito, e si stumidì allo sgravarsi d' immensa quantità di fecce, dopo la cui morte accaduta per una sospensione di sedici settimane si trovò l' ano otturato da una massa enorme durissima di scibale e gl' intestini retto e colon ridotti a sì gran mole, che recò la più straordinaria sorpresa. E Lieuteaud (4) riferisce il caso di un vecchio sottoposto abitualmente a costipazione di ventre, nel quale morto dopo la totale soppressione delle evacuazioni intestinali riscontrò il colon di enorme grandezza, attesa la quantità della materia biancastra quasi lapidea che racchiudeva. Merita poi distinta menzione a questo proposito l' osservazione di Navier inserita nell' Istoria dell' Accademia delle Scienze di Parigi per l'anno 1750 (5), ove in un giovine di 15 anni che a mala pena si sgravava ogni 20 giorni delle fecce intestinali, furono trovati i grossi intestini e specialmente il retto così dilatati, che l'ultimo rassomigliava più ad un sacco che ad un intestino. Or que-

(1) *Anat. pract. obs.* 30. Vedasi anche Bonet *Sepulchr.* Tom. II. pag 206. Morgagni *de Sed. & caus. morb. Epist.* XXXI. n. 1. crede che questa istoria del Blancardo sia la stessa che la precedente del Formio.

(2) *Oper. Parisiis* 1582 lib. XVI. cap. 58 pag. 512.

(3) *Ephem. nat. cur. dec. II. An. VI. obs.* 234 pag. 540 e segu.

(4) *Hist. Anatom. Med. lib.* 1. *Observ.* 292 Tom. I. pag. 82.

(5) *Hist. de l'Ac. des Sc.* l'an. 1750.

questo sacco, egualmente che tutto il colon ed il cieco, era totalmente pieno di materia stercoracea, senza che apparisse ragione alcuna della sua retenzione.

Questi e molti altri casi ad essi analoghi in ciò che riguarda l'assenza di un'alterazione organica manifesta atta a produrre l'angustia del canale intestinale e quindi l' ostacolo allo scarico della materia fecale, se provano che non è sempre una offesa di questa natura quella che ne sospende le evacuazioni, non sono però, a mio credere, sufficienti ad escludere qualunque sorta di ostacolo. Alla discesa ed espulsione delle fecce per un canale tortuoso e distraibile, qual' è l' intestinale, e di materie compatte, quali sono le fecce nel crasso intestino, due condizioni si richiedono: una è l'azione degli intestini sopra le materie contenute atta e sufficiente a promuoverne il movimento e progresso nel canale; l'altra è la libertà del canale medesimo, tale per lo meno, onde potersi senza gran difficoltà superare dalle materie spinte dall'azione intestinale. Se manchi la prima, o almeno sia grandemente indebolita, allora quei lievi ostacoli, che non si oppongono, ma solo ritardano la progressione delle fecce nell' uomo sano, divengono ostacoli relativi più o meno forti e talora anche insuperabili. Lo stesso avverrà se le fecce abbiano acquistato ta' grado di durezza e le scibale siano così voluminose, onde non possano superare gli ostacoli ordinarj; perchè in tal caso nasce un addizione a questi, che vincendo l'azione intestinale impedisce il progresso delle fecce, le quali sono necessitate a coacervarsi ed in fine a produrre i più funesti effetti. Così dall' indurimento straordinario delle fecce, che facevano la base della colonna, prodotto dalla soverchia azione dei vasi assorbenti e dall' impedimento indi opposto al loro rammollimento, si dedusse durante ancora la vita del nostro soggetto quell'ultima straordinarissima sospensione degli sgravj del ventre, da cui derivarono poscia le più funeste conseguenze; e l'osservazione del cadavere dimostrò quanto fosse fondata la congettura.

Che poi la causa primaria dei periodici arresti e del lungo ritardo degli sgravj del ventre nel caso nostro consistesse in quella totalmente straordinaria conformazione del retto, e non già nella durezza delle materie o nell' affezione spasmodica dell' estremità inferiore del retto e dell'ano, che talora concorsero ad accrescerla, più ragioni non permettono dubitarne. Ed infatti se gli angoli e le tortuosità ritardano la velocità dei fluidi nei canali di una determinata capacità, quanto più dovranno ritardare il moto dei corpi subfluidi, e quanto ancora più quello dei corpi che abbiano acquistato un certo grado di durezza? Questo ritardamento in Don Camillo si verificò fino dall' infanzia, e fu osservato accrescersi a misura dell' età. In quei primi tempi gli sgravj si soppprimevano

vano spontaneamente per più giorni. Non v'era indizio di spasmo o altro impedimento all'estremità inferiore del retto; non era la durezza delle materie che formasse l'ostacolo, perchè si rendevano costantemente molli, benchè per la brevità del ritardo non vi potesse esser luogo a credere che dopo il loro indurimento si fossero squagliate in forza di quella particolar fermentazione, che dopo i lunghi arresti le rammolliva; non esisteva negli intestini altro vizio organico fuori di quella particolar struttura del retto. Era dunque dessa che costituiva la cagione degli arresti. In progresso, cresciuto il ritardo, svegliavansi sul fine dei molesti stimoli e delle forti contrazioni all'ano atte a ritardare viepiù lo sgravio; ma ciò era conseguenza degli arresti, non causa, e quindi tanto maggiori succedevano tali sconcerti, quanto erano più lunghi i periodi. Nè io dubito che se si avessero altri esempj di simile struttura del retto, non venissero questi in appoggio del mio sentimento. Ma la storia anatomica-medica non ne somministra alcuno somigliante o almen descritto con le particolarità necessarie. Racconta Bonet (1) che in un certo *La Grange* Ginevrino, il quale era morto di volvolo dopo 15 giorni di total soppressione del ventre, l'intestino retto si era trovato ripiegato a guisa di un S, ma insieme lo stringeva un anello membranoso procedente dal processo del peritoneo che scende allo scroto, che fu la causa della soppressione del ventre e del volvolo. Haller (2) poi fa menzione di una doppia ripiegatura del retto da lui osservata, in una maniera così digiuna e passeggiera, che non può trarsene alcun lume patologico.

Posto l'arresto delle fecce nei grossi intestini e l'ostacolo qualunque atto a produrlo, ne segue la necessità del dilatamento del canale al di sopra dell'ostacolo. Se vi è qualche osservazione, che sembra dimostrare il contrario, esse riguardano per lo più casi recenti, nei quali è stato precluso il corso alle fecce istantaneamente colla morte dei soggetti e non vi è stato luogo a questi effetti che si generano a poco a poco. La dilatazione forzata degl' intestini, canali di lor natura molto distraibili, può essere l'opera del momento per una forza espansiva enorme che si esercita nella loro cavità. Questa forza può esercitarla l'aria, non mai le fecce accumulate. Per tal ragione nei casi violenti e di fresca epoca si leggono bensì esempj di maravigliose dilatazioni degl' intestini prodotte dall'aria in essi racchiusa e accumulata, non già prodotte da ammassi

(1) *Sepulchret. Lib. III. Sect XIV. obs.* 24 §. 9.

(2) *Elem. physiolog.* Lib. XXIV. §. XVIII. T. VII. pag. 145. Ivi parlando di questo intestino dice: *neque adeo unquam rectum est, etsi aliàs magis contortum vidi, & bis in se ipsum replicatum.*

massi di escrementi. L'aumento del diametro costante degli intestini non può seguire che per una cedenza graduata delle fibre, le quali cangino il loro stato per il cangiamento del grado di adesione dei loro elementi o per l' interposizione di nuova sostanza, alla cui introduzione e fissazione dia luogo il lungo stato di distrazione. Questo stato medesimo essendo comune alle nervose fibrille degl'intestini, tiene talora il luogo di stimolo, che vi chiama in maggior copia l' umor nutritivo, dalla cui affluenza nasce una specie di vegetazione morbosa, o sia il prolungamento e spesso ancora l'ingrossamento dei solidi componenti il canale.

L'effetto della dilatazione degl' intestini consecutivo agli ostacoli nel canale medesimo o a qualunque altra cagion di ritardo è dimostrato da un numero immenso di osservazioni. Si è già fatto menzione di alcune, nelle quali l' impedimento nasceva piuttosto dalla condizione delle materie contenute e da espellersi che da ostacoli organici. Ma i fatti di quest' ultimo genere rendono la cosa più evidente. Per convincersene adunque è d'uopo fare ad essi una più speciale attenzione. Io però non voglio darmi la pena di farne una esatta enumerazione. Basterà bene che io rammenti l' osservazione d' Hollerio (1), ove essendo il colon verso il rene sinistro ridotto scirroso e quasi cartilageneo con la quasi totale abolizione della cavità, la parte destra al contrario era espansa a guisa di una gran vescica; e che in quella donna di anni 63, che pativa lunghe ostruzioni di ventre, e nella quale si chiuse infine il ventre intieramente dopo uno sforzo fatto per alzare un peso, di cui dà la storia Gio: Bernardo de Fischer (2), colla sezione del cadavere fu trovato il colon dilatato del quadruplo con una contorsione al suo termine, ove comunica col retto, dalla quale non nuova o recente, come crede l' autore, ma minore e, se insufficiente a precludere del tutto l'uscita alle fecce, almen bastante a ritardarla, cred' io che dipendesse l'antica costipazione di ventre, cui la stessa donna andava soggetta. Niuna osservazione però è meglio adattata a porre sotto gli occhi il progresso di queste lesioni, che quella riferita da De Haen (3). Trattasi in essa di un uomo che tre anni avanti la morte aveva sofferta la passione iliaca con vomito stercoraceo, grave singhiozzo, e morì dello stesso male. Nel suo cadavere si trovò un forte ristringimento del colon alla distanza di sette pollici circa dal principio del retto, come appunto se fosse quivi stato stretto da una legatura. Qui erano

(1) *De morb. intermit.* lib. I. cap. 41 pag. 325.

(2) Benvenuti *Observ. Medicar.*, *quæ Anatomiæ superstructæ sunt Collectio I.* pag. 90. & seq.

(4) *Rat. Medend. P. II. Cap. V.* Vedasi ancora Stoll *Rat. Medend. P. I. sect. XIV.*

no obbligati a fermarsi gli escrementi non meno che l'aria e le bevande. Al di sotto quel resto del colon era divenuto più gracile, il retto non era ingrandito. Ma il colon dalla strozzatura fino al cieco eguagliava nella grandezza ove il braccio ed ove la coscia di uomo adulto, ed anche tutti i tenui intestini ed il ventricolo eccedevano del doppio e del triplo il naturale diametro. In quei casi adunque, nei quali si legge notata la dilatazione degl' intestini e specialmente dei crassi, e non si scorge l'ostacolo al corso delle materie contenute, converrà non ostante ammettere che vi fosse, ma non organico e atto a manifestarsi colla sezione del cadavere; come in quell'uomo, di cui referisce M. Aurelio Severino (1), che essendo morto di una lunga colica, cioè di 20 giorni, fu trovato il di lui intestino così turgido che superava in grandezza gli stivali da viaggio e nel quale non l'infiammazione venutane in ultimo, ma l'eccessiva ed antica mole delle fecce contenute, che non potevano essersi raccolte in quella maravigliosa quantità che egli dice nel corso della malattia, ma piuttosto dovevano esserne state la cagione, doveva pure aver prodotta molto avanti la dilatazione. Leggo negli Atti dell'Accademia dei Curiosi della natura (2), che nel cadavere di un uomo, il quale da lunghissimo tempo aveva il ventre turgido come nell' ascite una porzione del colon era così dilatata da rassomigliare un' otre globoso che con la vasta sua mole riempiva tutta la superior cavità del basso-ventre. E tra le osservazioni Anatomico-Chirurgiche di Federigo Ruschio (3) una ve n'ha di una fanciulla di cinque anni soggetta da molto tempo a dolori di ventre, nel cui cadavere trovò quella parte del colon, ove comincia a prendere il nome di retto, condotta a si enorme estensione, che cuopriva e sottraeva intieramente dalla vista tutti gli altri visceri contenuti in quella cavità. Or quantunque in queste due ultime ed in altre osservazioni, che taccio per brevità, non si noti cagione alcuna d' impedimento al di sotto della dilatazione, convien dire che mancando una lesione organica, la quale non sarebbe certamente sfuggita a sì grand' uomini, alcuna ve ne fosse d'altro genere, di cui già si è fatta menzione, che essi non si presero la pena d' indagare; seppur non vogliansi supporre congenite e organiche tal sorta di dilatazioni, o l'effetto di una atonìa locale, sul quale articolo, dove non sono dati che escludano tali cause o ne accennino di altra natura, lascierò che ognuno adotti quella opinione che più gli sembra verisimile.

La

(1) *De recond. Abscess. Natur. Lib. IV. cap.* 36 *p.* 276.
(2) *Dec. II. an. VI. obs.* 11 *pag.* 34.
(3) *Observ.* 92 *pag.* 118.

La dilatazione degli intestini e soprattutto dei grossi può ella conoscersi dai suoi particolari segni? Quali sono questi segni? Una siffatta questione non è nuova in Medicina, sebbene poi nessuno siasi data la pena d'illustrarla. Morì in Roma Donna Barbera Colonna consorte in quarte nozze del Marchese de Melchiorris, nel cui cadavere fu trovato il colon per tutta la sua lunghezza estremamente dilatato e pieno di sciolta materia stercoracea; massimamente poi espanso come un' otre e procidente egli era dove con doppia curvatura va ad innestarsi col retto, talchè con la sua mole premeva l' utero verso il retto in modo che questo e soverchiamente angusto ed al sommo ripiegato si ritrovò. Sorprese quei Medici, tra i quali Lancisi, Pascoli ed altri di quella Città, che in vita non si fosse neppur subodorata questa immensa dilatazione del colon; onde Gennaro Giannelli Medico Romano, che ne aveva la cura e ne distese l' istoria inserita nell' Efemeridi dei Curiosi della Natura (1), combinando i sintomi con ciò che nel cadavere si era scoperto, credè poter ridurre ai seguenti i segni della dilatazione considerata sola e non complicata; 1. agli stimoli continui di evacuare; 2. alla stitichezza di ventre contemporanea; 3. alla uscita dei flati anche nel tempo delle più lunghe e ostinate retenzioni delle fecce; 4. al dolore dell' ipogastrio; 5. alle irruzioni e vortici delle interne flatulenze, particolarmente in questa parte, ed alla loro esplosione piuttosto cominciata e non compita, che ritardata; 6. alla mitigazione del dolore giacendo nel letto, e meglio bocconi che supino, meglio supino che su i lati, meglio sul lato destro che sul sinistro; 7. alla molestia nel coito; 8. ai frequenti stimoli al vomito nel tempo dei travagli; 9 ai rutti frequenti anche nel migliore stato di salute compatibile. Vediamo pertanto che cosa ne somministri su tale argomento l' esame di questo caso, ed il suo confronto col nostro e con gli altri analoghi.

E per ciò che riguarda il primo segno, cioè gli stimoli assidui all'evacuazione intestinale basta riandare le circostanze del caso, da cui fu dedotto, per convincersi che nasceva piuttosto da altre cause che dalla dilatazione. Vi era stato un flusso abituale quasi dissenterico; introdotto nel retto un dito da un Chirurgo, sentì non so che di protuberante, tortuoso, e duretto; colla sezione del cadavere si trovò che l' utero voltato all' indietro esercitava sul retto una costante piegatura. Or queste cause erano per se medesime sufficienti a produrre quegli stimoli assidui, ancora senza la complicata dilatazione; fu dunque ingiusto l' attribuirneli. Ed infatti nel caso nostro, quantunque la dilatazione interessasse specialmente

(1) *Cent. IX. & X. in Append. pag.* 59 *& seq.*

cialmente il retto, pure mancava quella perpetuità degli ſtimoli, i quali non si manifeſtavano comunemente che quando erano imminenti o attuali i periodi delle evacuazioni, e quando essendosi già le materie portate prossimamente all'eſtremità del rettò lo spasmo v'interveniva a rattenerle. Nè trovasi notata queſta circoſtanza, non solo nei casi di dilatazione del colon riferiti dagli Autori, ma neppure in quelli, ove la dilatazione interessava specialmente il retto, nei quali a maggior ragione avrebbe dovuto manifeſtarsi.

Lo ſtesso io dirò del quarto segno dedotto dal dolore ipogaſtrico. Vi sono talora i dolori o in una maniera o nell'altra in occasione di dilatazioni inteſtinali; ma sovente vi sono senza di queſte, e molte volte malgrado la dilatazione essi mancano. Mancavano di fatto comunemente nel caso noſtro, e quando vi erano consiſtevano coſtantemente in ſtimoli e contrazioni dolorosissime all'eſtremità inferiore del retto, o sia in un tenesmo atroce, nè mai in quella sorta di dolore, che nel citato luogo si dà per uno dei segni della dilatazione inteſtinale. Per necessaria conseguenza non aveva luogo il seſto segno, almen per rapporto al dolore; perchè la situazione bocconi nel letto, che talora giovava a Don Camillo, non era già presa da esso e preferita per frenare il dolore, ma per coadiuvare l'uscita dell'aria. Nè occorre che io mi fermi a confutare il settimo segno consistente nella moleſtia nel coito, che aveva una più vicina e adequata ragione nello ſtato morboso e dolente del retto e nella ſtraordinaria situazione dell'utero; nè i frequenti ſtimoli al vomito coſtituenti l'ottavo segno, comecchè non comuni nè al caso noſtro nè ad altri analoghi; non dovendosi punto valutare quei sintomi, che insorgono soltanto agli ultimi periodi della vita, e che sono effetti del sommo sconcerto addominale, indipendentemente dalla dilatazione o della total soppressione delle evacuazioni.

Rimangono la ſtitichezza del ventre; l'uscita dei flati in tempo delle più oſtinate tardanze delle evacuazioni; le interne flatulenze del ventre e il modo delle loro esplosioni; i rutti. Il ritardo delle evacuazioni, che sussiſteva in donna Barbara malgrado l'affezione dissenterica; che trionfava in Don Camillo; e che si riscontra ordinaria in tutti i casi di dilatazioni del crasso inteſtino, dei quali son note le circoſtanze della malattia, è ben ragionevole riconoscerlo per una quasi necessaria conseguenza di esse; perchè se la dilatazione suppone un'oſtacolo al progresso delle fecce, o almeno un'atonia per cui l'inteſtino è quivi inabilitato a promuoverle a dovere, queſto medesimo porta indispensabilmente a tal ritardamento.

Nè tampoco possono ricusarsi qual segno di dilatazione le flatulenze e loro effetti, quali appresso a poco formano il quarto,

quin-

quinto, e nono segno ſtabilito dall'Autore della ſtoria del male di Donna Barbera, purchè si prenda queſta circoſtanza in tutta quella eſtensione e variabilità che può avere secondo le diverse combinazioni della dilatazione inteſtinale con la varia natura degli oſtacoli e con le altre coſtanti o accidentali complicazioni. E ciò si renderà più chiaro quando piaccia di fare attenzione a ciò che deve in tai casi precedere e accompagnare gli sgravj. A tale effetto dee prima ricercarsi e ſtabilirsi onde vengano quelle gran masse di aria, che si sviluppano incessantemente, e la cui miniera sembra inesauſta. Nel caso noſtro non può dubitarsi che non derivassero dalla massa fecale ritenuta. Esse non erano il prodotto della fermentazione delle soſtanze alimentari mal digerite. La digeſtione andava sempre bene quando non era soverchiamente perturbata dai tumulti addominali consecutivi ai lunghi arreſti, e forieri e compagni degli sgravj più penosi; nelle quali ardue circoſtanze non potea temersi alcuno sconcerto dalla indigeſtione, perchè il malato cessava di cibarsi. Le masse enormi di aria che sempre uscivano e non erano mai compensate dall'aria ambiente che si facesse ſtrada in quelle cavità, non potevano ripetersi nè dalla rarefazione, nè dal movimento dell'aria contenuta in esse. Altro dunque non vi era, che le materie fecali accumulate, capace di somminiſtrarla. Ma queſte materie non sono suscettibili di fornire tanta copia di aria se non quando certe loro parti componenti si risolvono nei loro elementi atti a prendere lo ſtato aeriforme. Onde lo sviluppo dell'aria dalle fecce indurite raccolte nei grossi intestini e loro dilatazioni suppone l'attuale loro scomposizione, che io senza individuarne il genere considero come una specie di fermentazione.

Trovata l'origine dell'aria, facile riesce la spiegazione degli effetti. Ma per considerare quella e questi quali segni della dilatazione intestinale non devono prendersi isolati; è d'uopo che vadano di concerto con il ritardo delle evacuazioni, che si sviluppino dopo un dato periodo di arresto, che si accrescono a misura della lunghezza dello stesso periodo. E la ragione si è che le fecce raccolte e indurite nei crassi intestini non sogliono concepire così presto quella particolare alterazione, da cui nasce l'evoluzione dell'aria, ma solo dopo un lungo trattenimento: che il lungo trattenimento esige e forma il lungo ritardo delle evacuazioni, che l'alterazione suddetta dee cominciare dai più piccoli gradi e crescere successivamente, e la stessa proporzione dee seguire lo sviluppo dei fluidi elastici; che infine la quantità dei fluidi elastici che si formano, a cose eguali, deve essere proporzionata alla massa delle materie, dalle quali essi emanano.

Or questa circostanza conduce al ritrovamento e spiegazione di un nuovo segno delle dilatazioni intestinali non avvertito dall'Au-

tore dell'istoria indicata. Esso consiste nel costante stato di mollezza più o meno grande, nel quale trovar si devono le materie, che si evacuano, a differenza di ciò che succede nell'ordinaria stitichezza. Ed infatti come potrebbero altrimenti evacuarsi materie per la lunghezza del trattenimento fortemente indurite, per l'ampiezza della capacità in cui sono raccolte formate in *scybale* di straordinario volume, impedite nel loro moto da qualche sorta d'impedimento, che si è pur riconosciuto indispensabile nel caso di simili lesioni? A fronte dell'ostacolo che dee risultarne riuscirebbe vano qualunque sforzo della natura o dell'arte per espellerle; quindi o la total soppressione e la morte o la loro evacuazione in stato di mollezza, onde mettersi in stato di cedere agli inpulsi superiori e di adattarsi alle angustie inferiori. Questo rammollimento adunque è il risultato di quella alterazione che dopo il lungo loro arresto alfine concepiscono le materie coacervate negli intestini, e da cui ha origine la produzione dei fluidi elastici. Tali perciò esser dovevano le materie evacuate da Donna Barbera, benchè si dicano naturali e per la stessa causa nel caso riferito da Störck (1) non seguivano mai gli sgravj a brevi intervalli se innanzi le fecce fermate nel retto non erano rammollite col mezzo dei clisteri. E sfortuna che non possa confermarsi questo fatto con una serie copiosa di osservazioni a motivo del silenzio degli scrittori a questo riguardo, forse perchè per lo più non furono testimonj della malattia, o non ne videro che l'ultimo fatal periodo.

Finalmente non deesi dimenticare un'altro segno delle dilatazioni medesime, che va di concerto coi precedenti. Questo è il tumore addominale risultante dal coacervamento delle dure fecce nella cavità dei crassi intestini dilatati il quale o più o men chiaramente dee manifestarsi alla vista ed al tatto. Se le fecce si trattengono, se si ammassano, se specialmente si coacervano nel luogo dilatato, dotate come sono di durezza, non possono mancare di costituire nel ventre una considerabile resistenza e protuberanza, facile a riconoscersi col tatto. Non è per altro che possa sempre assegnarsi a questa tumefazione una determinata figura ed una mole o circoscrizione limitata. Altra deve essere quando la dilatazione è parziale o mediocre, altra quando è universale o enorme. Diverso il sito, diversa la figura, secondo il luogo e la figura dell'intestino dilatato. In altro modo dovrà presentarsi all'esplorazione quando la tumidezza risulta dal solo ammasso delle fecce, in altro quando immense masse di aria vi si uniscono e dilatano con violenza il resto del canale. Così nel caso nostro da principio si osservava

(1) Vedasi poco sotto.

servava nascere e crescere nell' ipogastrio il tumore prodotto dalle fecce ritenute; in progresso poi cresceva la mole del ventre per ogni verso senza una figura determinata. Vi è qualche esempio ove la figura e circoscrizione dell' interno tumore formato dal fecale ammasso era ben distinta, e qualche altro ove era indeterminato. Antonio Störck (1) racconta un caso del primo genere, che osservò in un' uomo sessagenario. Costui per la percossa dei lombi si rese soggetto ad una fistola lungo le vertebre dei lombi, che lo portò alla consunzione ed alla morte. Egli era molto costipato di ventre, e bisognava ogni due giorni sollecitarne le evacuazioni con lavativi; altrimenti sopprimevasi l'orina, e compariva un duro e rotondeggiante tumore sopra il pube con molto dolore agli inguini e nel basso ventre; le quali cose evacuato il ventre si dileguavano. Nel cadavere adunque trovò che l' intestino retto a due dita dal suo principio dilatavasi verso la parte destra in un ampio sacco simile all' intestino cieco; il qual sacco era pieno di durissime *scybale*; e che il rimanente del retto fino all'ano era ingrossato e fungoso e così angusto, che le fecce dure non potevano in alcun modo passarvi. Al contrario nell'osservazione riportata da Teodoro Zuingero sopra citata fu notata la enorme intumescenza del ventre prodotta dalle fecce e dileguata per il loro sgravio, senza circoscrizione alcuna o figura, e senza che nella indicata circostanza potesse esservi. Confrontando questi casi insieme ne apprendiamo come la tumefazione del ventre prodotta dalle fecce possa distinguersi dagli altri tumori dell' interno del ventre. Perchè oltre ai lumi che può dare il sito se sarà cagionata dalle fecce fermate in qualche dilatazione, dovrà esservi la mancanza della loro evacuazione, o almeno le evacuazioni saranno manifestamente inferiori al bisogno; la tumefazione medesima si aumenterà a misura dell'arresto, e svanirà o diminuirà in una maniera rimarchevole dietro agli scarichi abbondanti degli escrementi. Questo segno porterà la diagnosi delle dilatazioni ad un alto grado di probabilità tutte le volte che vada unito agli altri segni, i quali abbiamo riconosciuti proprj a questo interessante oggetto.

Facendo ora ritorno ai proposti quesiti già si è data la soluzione della prima e seconda parte del V. quando si è fatto costare che la lunghezza e soprattutto la triplice ripiegatura del retto formava quell'ostacolo, di cui qui si ricercava la sede e l'origine. Le altre due parti del quesito medesimo, siccome ancora i fenomeni riuniti sotto il sesto quesito, posto quanto si è già dovuto dietro alla osservazione ed ai più savj principj stabilite, non possono con-

 siderandosi

(1) *Ann. Med. I. Cadaver. septimum*, *pag.* 134. *dell'Edizione d'Asterdam* 1779.

siderarsi che come effetti del lungo arresto ed enorme coacervamento delle fecce e delle consecutive alterazioni che sono obbligate a concepire esaltati ora per il consenso nervoso, sì attivo nel basso ventre, ora per l' irritamento intempestivo di sostanze purgative introdotte nel tubo intestinale in questo suo stato di passione, ora per le violente distrazioni indotte dall' aria sviluppantesi dalla ritenuta massa fecale.

Della stiratura all'ano, da cui nascevano i più gravi e dolorosi tenesmi ne fu già resa ragione ove all'occasione di far la storia della sezione del cadavere si fece parola dei cangiamenti succeduti in sequela alla rottura degli intestini ed al passaggio dell'aria dalla loro cavità in quella dell'addome. E per riguardo alla difficoltà e scarsezza dell' orina, oltre a quanto ne avvertì acutamente Bicchieraj nella riferita sua risposta consultiva abbastanza ne ammaestra l' osservazione di Störck poc'anzi a bella posta epilogata, ove la pienezza di un sacco del retto, premendo la vessica, cagionava la soppressione dell' orina. Questa osservazione ci conduce a investigare come nel nostro soggetto, ove spesso combinavasi tanta pienezza da occupare tutta quasi la capacità del vasto suo ventre, talchè gli altri visceri in gran parte avevano dovuto farsi luogo su nel torace, sollevando il diaframma, non cagionasse più spesso la soppressione dell' orina, e soltanto precludesse questa evacuazione nel contrasto che opponeva all'uscita delle materie la violenta contrazione all'ano ed all'estremità del retto. La ragione di ciò a me sembra, che soltanto in questa congiuntura la massa fecale avea occasione di trattenersi soverchiamente e accumularsi nell' ultima porzione del retto, distenderlo straordinariamente a segno di occucupare una gran parte del diametro della pelvi, ed esercitare una forte pressione sulla vescica. Poichè non è verisimile che le fecce venissero a fermarsi nell' ultima porzione del retto fin da quando le fecce dopo gli sgravj cominciavano di bel nuovo ad arrestarsi. La cagione del fermarsi le fecce era la lunghezza e le curvature del retto; dovevano dunque arrestarsi prima di aver superato l' impedimento, e così almeno avanti di aver sormontata l' ultima ripiegatura se l'arresto non si fosse fatto sino dal principio se non nell' ultima porzione quasi verticale del retto, non si sarebbe fatto che al di là degli ostacoli, o sia dopo averli superati. Niuna ragione allora vi sarebbe stata purchè non ne seguisse lo scarico. Il retto era pervio, era sano, non vi erano nè contrazioni, nè ostacoli che si opponessero. Perchè dunque non si sentivano gli stimoli? perchè non operavano i clisteri? perchè i purganti, incitando gl' intestini, ad un' azione più valida, non determinavano gli sgravj?

Queste riflessioni m' inducono nell'opinione, che in realtà le materie ammassate nelle prime porzioni del retto non scendessero

nell'

nell' ultima se non dopo essersi per l'accennato moto fermentativo grandemente rammollite e fatte più mobili, e che al tempo stesso varie circostanze s'aggiungevano ad accrescere l'azione espulsiva intestinale. Egli è molto probabile che le fecce messe in movimento per la causa sovra indicata diventino più stimolanti; ma oltre a questa cagione un'altra conviene ammetterne nell'immenso sviluppo dei fluidi elastici, i quali non solo possono molto contribuire ad aumentare il vigore del moto peristaltico con la loro azione stimolante insolita sul canale con metterlo in una maggiore espansione, ma ancora con esercitare essi medesimi una forza sopra le fecce mediante la somma loro condensazione. Ed inoltre facendo di tempo in tempo crescere il diametro delle porzioni superiori del retto che giacevano l'una sopra l'altra, ed obbligando così la terza porzione a portarsi più in alto nell'epigastrio, e l' ultima a venire in un sito più prossimo alla perpendicolare, nel modo altrove dimostrato, doveva necessariamente seguirne che l'angolo dell' ultima piegatura iliaco-lombare destra diminuisse cioè si rendesse molto più ottuso, onde ne derivasse molta diminuzione all' ostacolo, che questa ripiegatura opponeva al progresso delle fecce. Spinte pertanto queste con tutte le accennate forze primarie ed ausiliari, disposte a cedere per la mollezza acquistata, meno impedite alla curvatura iliaco lombare destra del retto, ecco come secondo il mio divisamento, la colonna fecale progrediva mediante ripetuti sforzi all'ultima porzione del retto, dove non rimanevale da superare che l'angustia del diametro in proporzione della mole che si avanzava; ostacolo che in progresso dovette esso pure quasi abolirsi atteso lo stato di dilatazione a cui ancora questa porzione venne a poco a poco condotta.

A misura che la massa si avanzava e si accumulava in quest' ultima porzione del crasso intestino, si mostrava ancora pronta alla evacuazione. Se uno stato spasmodico non interveniva a perturbare la funzione, la presenza della materia provocava lo stimolo ordinario, che dee precedere e promuovere lo scarico, il quale succedeva senza sconcerto. Questo era l'andamento più lodevole, come quello che nelle particolari circostanze del nostro soggetto si avvicinava il più possibile allo stato naturale, e che non essendo la malattia suscettibile di estirparsi per l' indole insuperabile delle cagioni da cui veniva fomentata, costituiva quello stato, che dovea considerarsi come naturale in esso, a forma di ciò che nel VII. quesito si domandava. Ma se vi prendeva parte lo spasmo, che specialmente avveniva o dietro ai più lunghi e voluminosi arresti, o per effetto di disordini nel cibarsi o dell' azione perturbatrice dei purgativi; in tal caso primieramente per la maggior turgidezza delle porzioni superiori del retto, e per lo stato di maggior espansione

sione

sione a cui erano obbligate dall'aria che si sviluppava e condensava in masse straordinarie, l'ultima porzione era stiracchiata all' insù con forza, e nascevano all'estremità inferiore quegli stimoli e quelle contrazioni provocate dalla stiratura. Il malato conosceva benissimo la differenza di questa sorta di stimoli da quelli che annunziavano la presenza e la disposizione all'uscita delle materie. Quando erano di questa specie si prestava volentieri al moto di succussione, alla doccia intestinale ec., e i tentativi erano coronati dal buon successo. Ma quando erano dell'altra specie non vi si prestava che per condescendenza, e ne prediceva l'inutilità. Qualche volta erano misti, cioè provocati dalla presenza delle materie pronte all'uscita, ed esasperati e resi violenti e dolorosi dalla spasmodia. Questo era il caso che gli sgravi delle materie spinte con forza al di sopra, e ritenute dalle contrazioni spasmodiche violente all'ano erano maravigliosamente promossi dall'uso generoso dell'oppio, e favoriti dal sonno.

Ma se queste erano le circostanze favorevoli e contrarie all'effettuazione degli sgravi intestinali, qual fu la ragione per cui nell' ultimo periodo, malgrado i più validi soccorsi, si soppressero essi invincibilmente o non successero che troppo tardi ed imperfetti? Accennai nell'istoria la causa del ritardo di quel moto fermentativo necessario all'ammollimento delle fecce ed al loro progresso. Quindi continuò ad accumularne senza renderne, e senza che le materie potessero avanzarsi nell'ultima porzione del retto per l'impedimento che opponeva la loro durezza. Da questo stato non par che sortissero se non quando dopo un ritardo di due mesi e più si affacciarono i segni della consueta fermentazione intestinale, specialmente da quegli sviluppi enormi di aria che solevano accompagnarla. Allora le materie fecero un movimento verso l'estremità del retto, ed allora i clisteri riuscirono ad evacuarne quella porzione che si era condotta fin quà. Ma siccome si esaltò al maggior segno il moto fermentativo e l'evoluzione dei fluidi elastici divenne estremamente copiosa e massima l'espansione intestinale; quindi crebbe fuor di modo la spasmodìa e i tenesmi acquistarono tanto maggior veemenza, quanto ne aggiungeva l'aumento del disordine nervoso combinato con l'affezione locale che si andava manifestando all'estremità inferiore del retto. Qual potente ostacolo formassero queste circostanze, ognuno può figurarselo. Il fatto fu che non si ebbe mai evacuazione sufficiente a corrispondere al bisogno, e che creatisi intanto nuovi disordini si preparò inevitabilmente il funesto scioglimento.

Quello che succedesse delle materie rattenute la sezione del cadavere lo pose sotto gli occhi. Giova quì rammentare come la materia stercoracea che occupava le inferiori porzioni del retto, per-

dute

dute le qualità proprie di essa, si era ridotta in quello ſtato a cui perviene nei pozzi neri per aver sofferti tutti i gradi di putrida fermentazione, o sia ad una specie di terriccio inteſtinale. Queſto risultato caduto così chiaramente sotto i miei occhi mi fece sovvenire di un fenomeno particolare accaduto poco innanzi ad una delle più illuſtri dame di queſta Città. Ella dopo una oſtinata febbre si rese soggetta ad una dolorosa e pertinace spasmodia inteſtinale. Passato molto tempo senza che ricevesse sollievo dai varii rimedj messi in opera, cominciò a rendere per secesso una materia, che quando gli escrementi erano fluidi, attesa la maggior specifica gravità, si separava subito dalla mescolanza e si deponeva al fondo dei vasi. Io esaminai queſta materia e trovai essere per la maggior parte carbonato calcario unito con pochissimo carbonato di magnesia e ferro, e con dei piccoli frantumi vegetabili. Fui allora dubbioso sulla provenienza di tal materia e le inculcai di portarsi a Chianciano per passare vigorosamente quell'acqua acidula, sotto il cui uso ella continuò a sgravarsi di una sorprendente quantità di materia dell' iſtessa indole e ricuperò la primiera sua florida salute. Ora poi combinando queſto fenomeno coi risultati della scomposizione delle fecce osservate in Don Camillo, sembrami poterne inferire che quelle terre e quei frammenti vegetabili altro non fossero che gli avanzi di una lenta e totale scomposizione della materia stercoracea sofferta dalla medesima nel suo lungo trattenimento nelle celle del colon, giacchè non avrei saputo mai persuadermi che provenissero da una secrezione. Queſta scomposizione delle fecce spiega l'origine delle coliche abituali, cui van soggetti coloro che sono molto coſtipati di ventre, e nei quali le fecce si trattengono lungamente nelle cavità inteſtinali. Con essa si rende ragione molto meglio che fin quì non era riuscito delle flatulenze che le accompagnano, e dei tormini cagionati da queſte, e dalla irritazione delle materie risultanti dalla scomposizione, o dall'asprezza e irritazione meccanica degli avanzi. E poichè non vi è cosa più efficace per vuotare e ripulire le cavità e ripoſtigli degli inteſtini quanto il farvi passare in massa e ripetutamente un'acqua minerale dotata di virtù catartica, o insinuarla in copia nei grossi intestini per doccia inteſtinale, così ne apparisce la ragione della preferenza, che queſti metodi si sono acquiſtata sopra qualunque altro nella cura di tal sorta di malattie.

L'ottavo quesito tendeva a ſtabilire quel siſtema di vita e di cura il più efficace ed il meno soggetto a inconvenienti per conseguire la guarigione radicale, o almeno per condursi al miglior grado sperabile. Si è già fatto conoscere che la guarigione radicale era impossibile, e si è veduto quale fosse il miglior grado sperabile; quello cioè, nel quale la coſtante osservazione avea dimo-

ſtrato succedere le evacuazioni a più brevi periodi ed insieme con più facilità o sia col minore sconcerto. Queſta sicura guida, e maeſtra avea baſtantemente scoperto che ritardavano e difficultavano le evacuazioni: 1. la mancanza del moto e la vita sedentaria; 2. i cibi indigeſti, troppo succulenti, o in quantità soverchia; 3. i purganti, che al contrario le facilitavano: 1. la vita esercitata e soprattutto il moto di succussione; 2. L'uso di cibi facili alla digeſtione, vegetabili, non flatulenti, e soverchiamente succulenti; 3. l'aſtenersi da qualunqne sostanza dotata di facoltà purgativa. Che nei maggiori travagli i soli rimedj tollerati erano: 1. il moto di succussione; 2. La doccia inteſtinale o di acqua pura o di acqua minerale; 3. l'oppio all'oggetto di frenare la spasmodia; 4. il liquore anodino minerale dell'Hoffmanno o altri miti carminativi per procurare l'uscita all'aria. Queſti risultati rispondono sufficientemente al contenuto dei quesiti VIII. IX. e X., e giuſtificano la noſtra dirò quasi inazione fino all'epoca dell'ultimo fatal periodo. sopra i medesimi dati si appoggiava la cura, che modificata dalle circoſtanze fu intrapresa dopo che l'arresto aveva trascorso qualunque più lungo intervallo e che s'ebbe ragion di temerne le più funeſte conseguenze; non essendosi dato luogo ad alcuni tentativi più violenti, come l'introduzione del decotto di tabacco per lavativo, che per non incorrere la taccia di avere omessi in un caso omai disperato quel genere di soccorsi che in casi pur disperatissimi hanno talora riportato qualche fortunato suecesso.

Non mi reſta che render ragione perchè in circoſtanze così critiche non siansi messi a prova alcuni altri espedienti di queſt' ultima classe, che la medica iſtoria suggeriva. Può contarsi in queſto numero primieramente l'injezione negli inteſtini del ſumo di tabaceo. Ma dopo il siniſtro tentativo fatto col decotto, e preferito sì perchè a giudizio dei più gran pratici poteva equivalere all'introduzione del fumo, sì ancora per servire di prova e scorta per il secondo, non sarebbe ſtato l'azzardarlo temerario e colpevole?

Il mercurio crudo fatto inghiottire in dose generosa, come si pratica nella passione iliaca ed in altre pertinacissime oſtruzioni del ventre, è il secondo rimedio, di cui vedranno alcuni con maraviglia non essersi fatta parola. Io non ſtarò a fare il dettaglio delle ragioni che ne escludevano l'applicazione al caso noſtro. Mi baſterà di avvertire che l'esperienza ne avea fatta coſtare l'inutilità e forse il danno in caso di ampia dilatazione del colon descritto da Giannelli Medico e sopra rammentato, sconosciuta però innanzi alla sezione del cadavere, talchè il celebre Lancisi nella sua Epiſtola al Giannelli che serve di scolio alla sua iſtoria ebbe a

di-

dire (1). *Quamobrem si post factum esset consilium*, cioè dopo aver conosciuta l'esistenza della dilatazione, *certe ab hoc remedii genere abstinendum fuisse censemus; sua enim gravitate plurimum nocuit, cum extremam coli sectionem ad uteri fundum magis detruserit, ac pertinacius retinuerit*. Certi noi dunque della dilatazione non potevamo dissimulare il danno del mercurio portato in gran massa e gravitante nelle più basse parti di essa, e chiunque si rappresenti alla mente, come il retto dalla ragione iliaca destra venuto alla sinistra piegandosi risalisse per la regione ombelicale fino alla regione lombare sinistra, e previa una seconda curvatura continuasse a salire per la regione epigastrica, non potrebbe certamente approvare in circostanze di tal fatta l'introduzione del mercurio vivo colla mira di superare con la sua gravitazione l'ostacolo delle fecce che riempivano quelle ampie cavità.

E perchè dunque non si è fatto ricorso alla macchina simile a quelle che si adoperano per estinguere gl'incendj, inventata anni sono a Milano sotto il nome d'*idroconstaterio* per superare la passione iliaca più disperata? Gli elogj fatti a questa macchina da Widemar, che il primo diè la descrizione del meccanismo e dei successi; e soprattutto gli schiarimenti modernamente dati dal Cel. Sig. Palletta Chirurgo Milanese di gran valore, intorno alla maniera e sicuro metodo di adoperarla, non doveano incoraggire, anzi determinare a metterla in pratica? Ma chi non vede che all' *idroconsteterio* equivale perfettamente l'ordigno, con cui si eseguisce la così detta e da noi abitualmente usata doccia intestinale? Poichè l'oggetto dell' *idroconstaterio* essendo d'introdurre negli intestini l'acqua pura o altro fluido con getto perenne e con forza sufficiente a superare l'ostacolo che forma l'ostruzione del canale; a questo oggetto adempie in tutto e per tutto la doccia. Lo strumento è formato di due tubi verticali e paralleli comunicanti insieme alla loro inferiore estremità per mezzo di un tubo trasverso che gli unisce. Il primo dei tubi verticali dell'altro assai più breve termina superiormente in un cannello o sifoncino adattato ad introdursi nell'ano, ed a tale effetto convenientemente situato; l'altro molto più lungo deve partire alla sua sommità da un ampio vaso, che si riempie del fluido che vuolsi injettare negl' intestini, già preparato alla conveniente temperatura, e dee prodursi in altezza quanto fa d'uopo acciò la colonna del fluido premente lo spinga per l'orifizio del primo con la forza e celerità necessaria e proporzionata per superare l'ostacolo opposto negl'intestini. Questo metodo d'injettare il fluido con forza e a getto perenne

(1) *Ephem. Acad. nat. Cur. Cent. IX. & X. App. pag.* 529.

nella cavità inteſtinale, mentre ha tutti i vantaggi della macchina milanese, va esente dai difetti che a quella si attribuiscono. La forza e celerità del fluido che essa getta, può moderarsi a piacimento o del medico o del malato, sia col variare l'altezza del fluido premente, sia per mezzo di un robinetto poſto in luogo comodo ed anche a portata di chi deve usarne, col quale girandolo più o meno potersi crescere o scemare ad arbitrio la luce del canale, od anche sospendersi nell'iſtante ogni getto del fluido. Per la qual cosa eſſendosi dovuto abbandonare queſto meccanismo nelle infelici circoſtanze che accompagnarono l'ultimo periodo, non vi era nemmen luogo alla macchina Milanese, che presentava le medesime se non maggiori difficoltà.

Reſta solo da esaminare se vi era luogo all'eſtrazione chirurgica delle fecce ammassate nel retto. Che con queſto mezzo siasi talora ottenuto il più felice successo in casi di oſtruzione del canale inteſtinale prodotta da dure e grosse *scybale* fermate verso l'eſtremità del retto, o di corpi duri incongruentemente inghiottiti e quivi fermati e inchiodati, infiniti esempj lo dimoſtrano, ed in queſto ſtesso spedale di S. M.ª della scala, sotto i noſtri medesimi occhi se ne è osservato ripetutamente il vantaggio in varii soggetti, nei quali un ammasso di nocciuoli di ciliege fermato nel retto avrebbe senza il soccorso della mano chirurgica condotto quei miseri al sepolcro (1). Ma nel

(1) Non proporrò ad imitare l'esempio di quei due Baroni Slesiani di cui si parla nelle Effemeridi dell' Accademia dei Curiosi della Natura dec. I. an. II. obs. 44 pag. 74, e an. I. obs. 98. pag. 200. i quali per liberarsi da un' oſtinata e disperata oſtruzione di ventre si cacciarono nell' ano con violenza il primo un gran cucchiajo di legno, e l'altro un fusello di ferro. Ne fa al proposito noſtro l'introduzione di una bacchetta flessibile di filo di ferro o di osso di balena, munita alla cima di una spugna ec. quale vien propoſta da Lancisi nel luogo cit. *Eph. Nat. Cur. cent. IX. & X. in append. pag.* 530, comecchè deſtinata a procurare l'esito a materie suppoſte fluide. Il buon Chirurgo si serve del dito bene spalmato di olio, o introduce un pajo di adattate forbici per tagliare le *scybale* indurite (ved. Sauvag. *Nosol. Metod. Class. IX. sen. XIX. n.* 9). Nel nostro Spedale per smuovere e schiodare i noccioli di ciliege ammassati è ſtata sufficiente l'introduzione di una spatola adattata, ed alrri fanno uso di una cucchiaja fatta a quest' oggetto, con cui ad un tempo s'incidono le fecce e si eſtraggono. Ma l'uso di queſti ſtrumenti suppone che non vi sia oſtacolo locale, fuori di quello che oppone lo ſtato naturale dello sfintere, e che evacuate le fecce sia vinta la malattia. Che se l'inteſtino era ormai attaccato, l'operazione riesce fruſtranea, come ho pur veduto succedere ad un uomo in queſto ſtesso Spedale, che morì malgrado l'eſtrazione dei noccioli di ciliege, e come successe in quel caso riferito da Teodoro Zwingero (*Ephem. Acad. Nat Cur. Dec.* II *an. VI pag.* 542) ove contuttochè un Chirurgo dilatato l'ano con lo speculo, ne eſtraesse molti noccioli di ciliege e molte fecce, l'ammalato morì per l'attacco degl' inteſtini.

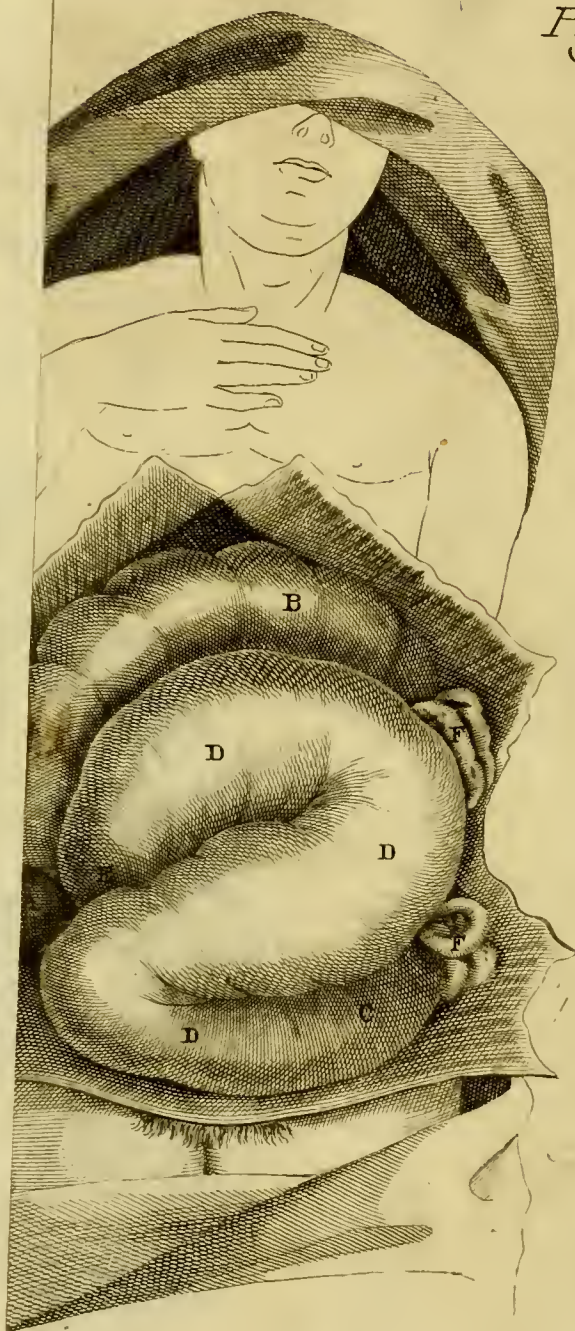
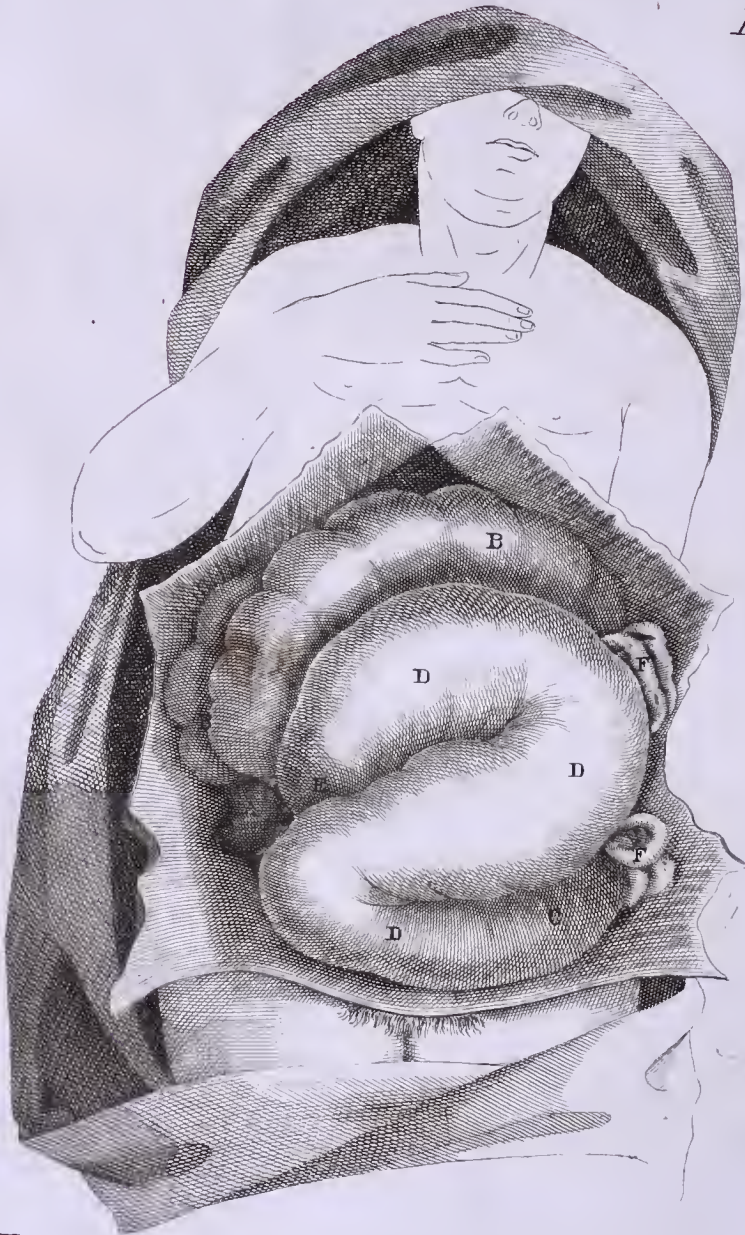
nel caso nostro non ci parve che si presentasse in alcun tempo l'opportunità di ricorrervi. Niuno penserà certamente esser questo un mezzo suscettibile di usarsi abitualmente, e che ad esso dovesse ricorrersi per impedire i lunghi ritardi delle evacuazioni nei periodi che precederono l'ultimo. Ma se questo è, non vi è alcuno che possa neppur pensare che vi fosse luogo a ricorrervi finchè il ritardo in quest'ultimo periodo non avea per anche ecceduto l' intervallo degli antecedenti più ostinati. E dopo che l'ebbe ecceduto non dovea farsi sperimento della doccia, dei clisteri comuni, o di decotto di tabacco, del moto di succussione; e di altri espedienti che in passato erano stati coronati dal buon successo? Intanto dunque che si operava sulle antiche tracce, venne fatto di osservare la gravezza, violenza, e pertinacia dei tenesmi, le contrazioni dell' ano furono del pari violente a segno che questa parte non avrebbe di leggieri sofferta una forzata dilatazione, e si ebbe in fine ogni ragione di credere che l' estremità inferiore del retto non fosse esente da vizio locale. Queste circostanze, lungi dal farsi più propizie in progresso crebbero anzi di forza; si aggiunsero i segni dell'affezione universale degli intestini, la quale metteva ormai l'infermo nel più gran pericolo, ancorchè ne fossero in qualsisia modo sopravvenute le evacuazioni. Chi mai con sì contrario apparato sarebbesi azzardato alla estrazione a fronte del contrasto opposto dalla spasmodia locale, e dalla violenza che era necessario fare ad una parte che stava in un'azione veemente contraria, e nello stato più doloroso? Tali lamentevoli condizioni quanto alienavano dal pensiero dell'estrazione, altrettanto esigevano quel genere di soccorsi che furono in tal tempo apprestati, Ma gli effetti della lunga retenzione delle fecce, e delle enormi distrazioni cagionate dalle immense masse di aria continuamente sviluppantisi per la loro scomposizione erano giunti al suo colmo; l'afflitta ed agitata macchina dell' illustre malato non era suscettibile di un più lungo defatigamento e dovè soccombere sotto l'orribil peso dei suoi atroci travaglj.

Spiegazione della Figura.

Aperta la cavità del basso-ventre e messi allo scoperto i visceri contenuti, si vedono:

A. L' intestino cieco.
B. B. Il colon.
C. Il termine del colon ed il principio del retto.
D. D. D. Il retto dilatato e tortuoso.
E. La curvatura iliaco-lombare destra del retto.
F. F. Porzioni degl' intestini tenui.

Pag: 288.
B
F
D
D
E
F
C
D

B
D
D
D
E
F
F
C

ELOGIO

DI GUIDO SAVINI PATRIZIO SANESE

PRIMO PROVVEDITORE (1) DELLA REGIA UNIVERSITA' DI SIENA

Pronunziato pubblicamente nell'Accademia dei Fisio-Critici

Il dì 13. *Aprile* 1798.

DAL COMMENDATORE FRA DANIELLO BERLINGHIERI.

GUido Savini nacque in Siena il dì 3. Luglio 1718. di Scipione Savini, e di Olinda Tancredi, gentiluomini di questa Città. Ambedue le famiglie, paterna e materna, erano di quella classe rispettabile che riconosce la sua nobiltà, non dai diritti della conquista, o dal lungo possesso, e forse dall'abuso, delle ricchezze, ma dall'antichissimo esercizio delle più cospicue magistrature, e dai servigi renduti alla patria fin quasi dall'aurora della sua politica esistenza.

Egli era l'ultimo di quattro fratelli, il primo dei quali si è distinto per una notabile signoria di costumi e di carattere; il secondo per un'indole filosofica, non meno che per una vasta e profonda erudizione; il terzo per il coraggioso zelo con cui depose le insegne di un'Ordine cavalleresco e sovrano, per vestir quelle più umili e più austere del santo Legislatore d'Assisi.

Passò gli anni della sua adolescenza, sotto gli occhi del padre, e sotto la disciplina di ottimi maestri, negli studi, che erano allora in grande onore nella nostra città; testimoni i sommi ingegni che quella età ha veduti crescere e fiorire, e che, perduti da tanti anni, si rammentano ancora con desiderio. Studiò con ardore le Lettere umane, la Metafisica, e la Morale; senza lasciare indietro le scienze esatte, nè la filosofia della natura. Coltivò medesimamente

(1) Nel 1777. il Granduca Pietro Leopoldo di gloriosa memoria ordinò che l'antica Università di Siena non fosse più regolata da un Capo puramente Economico, coadjuvato da una Deputazione di Letterati, il quale chiamavasi Rettore, ma bensì da un Uomo di Lettere a cui diede il nome di Provveditore.

te lo ſtudio delle Leggi, e per condiscendere al desiderio de' suoi, e perchè non potea trascurarsi senza vergogna in una città ove la vita dei Patrizi era quasi una continua magiſtratura.

Fornito di queſti presidj, e insignito del grado dottorale nell'una e nell'altra Giurisprudenza, passò ad apprenderne la pratica in Roma, ove lo invitavano le teſtamentarie disposizioni di un suo antenato (1).

Ivi il suo primo soggiorno fu l'Accademia Ecclesiaſtica. Di poi provò tutte le noje del foro, sotto di un'Avvocato più capace di addottrinarlo nella sua professione, che di fargliela amare. Tale egli medesimo lo dipinge in una bella Epiſtola in versi latini, di uno ſtile ingenuo e soave alla maniera di Orazio, scritta da Roma ad Alessandro, il secondo ed il più amato de' suoi fratelli. E' queſta la prima produzione, e la sola in tal genere, che abbiamo dalla sua penna. Ma tali faſtidi gli venivano per altra parte largamente ricompensati.

Roma conservava ancora gran parte del suo splendore. La importanza dei negozi, e la dignità delle azioni, di cui essa era il centro, e come il teatro, nutrivano in lei quel carattere di elevazione e di grandezza che l'ha diſtinta mai sempre nelle varie vicende della sua fortuna. Un numero infinito di personaggi, diversi di grado, di talenti, d'inclinazioni, vi accorreva dalle provincie vicine e remote; chi tirato dalle lusinghe della fortuna; chi dal pomposo spettacolo dei grandi della Chiesa e del secolo; chi dal genio delle belle arti, e dalla copia dei lumi, che, quasi in un'emporio generale dell'Italia, quivi si trovavano riuniti; chi finalmente dalle dolci attrattive di una società culta e raffinata. Guido avea il cuore troppo nobile e troppo sano l'intelletto per correre avidamente le vie della grandezza e della fortuna. Quelle del piacere non gli erano ignote; ma del piacer vero, ſtabile, guidato dalla ragione, e compagno indivisibile della virtù. Tirato da una invincibil forza verso tuttociò che vi ha di grande, e di bello, Egli non vedea in Roma, che il trono delle belle arti, l'albergo dei bell'ingegni, e il tesoro delle preziose Reliquie della elegante insieme e venerabile antichità. Di tutte queſte cose Egli divenne finissimo conoscitore. Coltivò ancora la Musica quanto baſtava per il diletto, e per l'intelligenza; e persino fra i pesanti volumi delle forensi biblioteche trovò il modo di soddisfare alla sua dominante inclinazione per il bello, facendo tesoro di tutta la erudizione e di tutta la filosofia, che formano la parte, per così dire, *trascendentale* della Giurisprudenza.

Ma

(1) Il Cav. Marcello Biringucci prozio materno del Savini, fondò un legato di studio da godersi fuori di patria, colla preferenza a favore de' suoi consanguinei.

Ma in niuna cosa mai le qualità del suo cuore e del suo spirito si moſtrarono così espresse, come nella elevazione e nella condotta delle sue amicizie. La sua nascita, i suoi talenti, la sua cultura, e quella grata dolcezza nella conversazione, nelle maniere, e sino nella fisonomia, ch' Ei possedeva in supremo grado, e che può su i cuori più che il nome, più che i talenti, e più che la cultura, gli aprivano un facile accesso ai più ragguardevoli porporati, e alle famiglie più splendide e signorili. Senza rigettare con soverchia ruſticita ogni dimeſtichezza di queſto genere, Egli le riguardava come catene dorate; dalle quali ardeva di sollevarsi, rifuggendo nel seno di altri amici di tutta sua scelta, e pari a Lui, se non di temperamento e di carattere, almeno di spirito, di massime, e d' inclinazioni.

Roma racchiudeva allora nel suo seno un numero considerabile, non solo dei migliori, ma ancora dei più amabili ingegni d' Italia e di altrove, nei quali ogn'altra passione cedeva all'amor delle Lettere, e della elegante società. Uomini di queſta tempera sono sempre compatriotti ovunque sien nati, ed ovunque s' incontrino si ricercano con avidità, e si uniscono con coſtanza. Era fra queſti il Pesciatino Forti (1), di cui il minor pregio si era d' essere il più rinomato Giureconsulto della Curia Romana. V' era l' Opitergino Cecchetti, uomo di franca sincerità, di piacevole ingegno, e di vaſta letteratura, e conosciuto non meno pe' suoi scritti, che per le sue disgrazie (2). Eranvi i due fratelli Buonamici, Filippo, e Caſtruccio; uomo di Corte il primo, di facili coſtumi, cui la fine eleganza dello scriver latino inalzò presso ai Pontefici alla carica di Segretario di quell' idioma; militare l' altro fervido e impetuoso, emulo di Cesare nella latina iſtoria, di Guidiccione, del Coſtanzo, del Casa nella toscana poesia: uno Stay di Ragusi, autore del sublime poema del *Neutonianismo*, e socio di queſta voſtra Accademia;

(1) L'Avvocato Gaetano Forti fu assunto pe' suoi meriti alla Prelatura, e fatto *Promotor della Fede*. Morì nell'intervallo fra la sua nomina al Cardinalato, e l' effettivo conseguimento di queſta dignità.

(2) L' Abate Raimondo Cecchetti d' Oderso nel Friuli fu Segretario in Roma di molti Ambasciatori Veneti. Avendo incorso il dispiacere di una gran Corte d'Europa per alcune espressioni poco misurate di uno scritto che si sparse nel mondo contro sua voglia, fu costretto a viver fuggiasco per alcuni anni, e fu debitore della sua salvezza alla coraggiosa amicizia dei fratelli Savini, che nel forte della burrasca lo accolsero in una loro Villa. Veggansi le Memorie che ha pubblicate della sua vita il Conte Bernardino Tomitano. L' Opera che ha fatto più onore al Cecchetti è stato un Trattato *degli Asili*, stampato in Padova nel 1751.

cademia; un Ganne Avignonese (1); un Paribeni Pistojese (2); un Rossi Fiorentino (3); un Venuti di Cortona (4), un Crivelli di Trento (5); per non parlare di molti e molti altri, degni pure di esser notati, se non bastassero questi pochi a far conoscere di quali uomini fosse composta la società, onde formava Guido la sua delizia. Non sì tosto Egli ne fece parte che ne divenne come il centro ed il vincolo principale. E' incredibile la tenerezza con cui li amava, e n' era a vicenda riamato. La sua indulgente sensibilità riuniva fra loro i più opposti temperamenti de' suoi amici; faceva suoi propri tutti i di loro interessi, e non contento di assisterli coi consigli e colla persona, malgrado la ristrettezza delle sue circostanze, trovava ancora il modo di essere seco loro liberale. Talvolta padrone di una sola camera, e di un sol letto, godea dividerlo con chi di loro si trovasse in istato d'averne bisogno. In questo letto ospitale Castruccio Buonamici, solito a passar la vita fra i favori e gl' insulti della fortuna, ha composto i più bei pezzi della sua *Guerra di Velletri*. Li componeva tra se la notte; indi scuoteva Guido dal sonno perchè li ascoltasse.

Questa lieta ed amorevol brigata fu per Guido una scuola assai migliore di qualunque Università. Vi apprese Egli a porre del continuo il suo gusto ed il suo giudizio a confronto coi più solidi giudizi, e coi più fini e delicati gusti del mondo. Sparsi quanto lo richiedevano gli affari e i doveri di ciascheduno nelle diverse parti del vortice Romano, si riunivano essi giornalmente, per ricrearsi in un commercio di spirito e di scambievole amicizia. Sovente ancora si congregavano in luoghi e giorni destinati, sotto la forma di regolari accademie, per ascoltare i Discorsi che ciascheduno a vicenda vi recitava sopra qualche punto di Metafisica, di Dritto pubblico, di belle Lettere, o di Antichità. Erano essi il più bell' ornamento delle Adunanze poetiche degli Arcadi, e dei Quirini; e tanto in queste che in quelle Guido riscuoteva la pubblica ammirazione, sia colle sue eleganti poesie, sia co' suoi dotti ed eloquenti Ragionamenti. Uno solo di questi, che ci è pervenuto intiero, dee farci grandemente compiangere la perdita degli altri. In questo,

(1) Uomo di gran spirito e cultura d' ingegno, Agente in Roma per la sua nazione.

(2) Il Cav. Giuseppe Paribeni, dipoi Professore d'Istruzioni Canoniche nell' Università di Pisa, il di cui non ordinario carattere si crede adombrato dal nostro Guido in uno squarcio d'eloquenza teofrastica, intitolato *Ritratto di Damone*.

(3) Bibliotecario di Casa Corsini, uomo di somma dottrina, e d' altrettanta probità.

(4) L' Ab. Ridolfino Venuti, Antiquario Pontificio.

(5) Agente in Roma dell' Elettore di Magonza, e dell' Arcivescovo di Salisburgo: fu di rara erudizione e bontà.

sto, contro la opinione di Grozio, di Barbeyrac, e di altri famosi Giuspubblicisti, si esclude dal numero degl' innumerabili diritti stabiliti dalla Natura quello di testare, nel modo che l' intendiamo e che l'usiamo, e si rilega fra le positive disposizioni del Dritto civile. Questo Saggio è scritto con solidità di ragionamento, e con semplicità di stile conveniente al soggetto, a cui danno tuttavolta risalto dei tratti non mendicati di una vera eloquenza.

A quest' epoca, ed a queste medesime circostanze, appartengono ancora i pochi saggi di poesia lirica che di Lui abbiamo; dai quali, e specialmente dalla incomparabile *Ode alla Speranza*, ben si conosce come, se un tal genere di gloria ambito avesse, potea facilmente avanzare, non che raggiungere, i più rinomati Lirici della nostra Lingua: tanto alla perfetta cognizione, e al gusto sopraffine di questa, riuniva Egli la robustezza dei pensieri e la vivezza del colorito dei Classici antichi, a Lui sopra ogni credere familiari.

Guido aveva fatto abbastanza per il suo spirito e per la sua reputazione, ma nulla per la sua fortuna. Venuto quindi il tempo ch' Ei ritornasse alla patria, non credette il Principe Chigi poter meglio impiegare la nomina, che per dritto patronale gli apparteneva, alla dignità di Arciprete della Metropolitana Sanese, che collocandola sopra la sua persona. Lasciò Roma il nuovo eletto piena della memoria de' suoi talenti e delle sue virtù, e portò seco una tenera rimembranza, che ha conservato sino alla morte, del soggiorno e dei compagni della sua giovinezza.

Non più laico nè sacerdote ancora, fissò gli sguardi sulla nuova carriera di lunghi e difficili studi, che se gli apriva dinanzi. L'abbracciò con ardore, e l' amore che vi pose gli fece credere per qualche tempo di essere dalla Provvidenza chiamato a quello stato di vita. E sebbene Ei dovesse finalmente accorgersi che si era ingannato, tali progressi avea già fatto in tutte le sacre dottrine, che fu poi cosa maravigliosa a vedere, allorchè si fu ritirato dal santuario, come pochi vecchi sacerdoti e teologi di professione potevano stargli a fronte nella intelligenza dei Padri, nella Istoria Ecclesiastica, e nella scienza dei Canoni e della disciplina.

Dalla severità di queste occupazioni si ricreava colle dolcezze della vita domestica, e coll'amenità de' suoi studi privati. Restato privo dei genitorj, viveva in un' intima unione co' suoi fratelli. La casa Savini era il ricetto dei buoni studi, e della nobile ospitalità: gli sventurati vi trovavano un'asilo; e le persone più culte della città si facevano un'onore di frequentarla.

Dei frutti letterari dati da Guido intorno a quel tempo, l'Epistola oraziana volgare a Castruccio Buonamici è il solo che ci sia pervenuto intiero: pezzo incomparabile, che forma da se solo nella poesia italiana un genere del tutto nuovo, e che, con destino assai

raro in simili componimenti anco ſtampati, inedito, ha sopravvivuto alla occasione, ed alle persone, per cui fu fatto.

Pochi versi scampati dal naufragio della traduzione che aveva intrapresa del poema inglese di Marco Akenside su i *Piaceri della Immaginazione*, e i giudizi che di essa si leggono nelle lettere de' suoi illuminati amici, ce la fanno conoscer degna dei noſtri rammarichi.

I suoi eccellenti principj intorno all'arte di tradurre si veggono sviluppati nelle osservazioni che ad iſtanza dell' Abate Giannetti fece sopra una sua traduzione delle Georgiche di Virgilio. Queſto breve ma sugosissimo scritto, ove l'esempio è congiunto ai precetti, ed ove la modestia e la gentilezza prestano alla savia critica il lor dolce linguaggio, sgomentò nondimeno il traduttore in tal guisa, che condannò egli medesimo la sua fatica ad una perpetua dimenticanza. Ma la menzione di queſt'opuscolo ci ha condotti ad un'epoca in cui Guido erasi già spogliato della sua ecclesiaſtica dignità.

Imperciocchè, non sentendo punto crescere in se medesimo la vocazione per lo ſtato sacerdotale, incapace di sacrificare la sua coscienza all'ambizione o all'interesse, vi rinunziò del tutto nel 1757: ed in quel medesimo anno, quasi che sgombro di un grave peso si sentisse animato di una novella attività, posò i fondamenti di quella riputazione di eloquenza che si accrebbe in appresso, e che verrà confermata, se io non erro, dal giudizio della poſterità. Alla presenza dei magiſtrati e del popolo sanese, accolti nel sacro tempio di Provenzano per l' annuo solenne aprimento dei pubblici ſtudi, diresse Egli al Corpo adunato dell' Università, quella nobile parenetica Orazione, che fu quasi un presagio dei poſti che dovea poscia occuparci.

La Università di Siena, quell' antico Liceo che ha il vanto di aver dato nel decimoquarto secolo un' asilo alle scienze fuggitive da Bologna, e di aver prodotti o posseduti i Benzi, i Sozzini, i Palearj, e tanti altri famosi reſtauratori delle Lettere e delle scienze, e che all'ombra della Real Casa de' MEDICI aveva conservato ed accresciuto ancora il suo splendore, era ultimamente caduta, per una varietà di sfortunate combinazioni, in un tale ſtato di debolezza e di languore da far temere l' eſtinzione persino degli ultimi veſtigi della sua esiſtenza. Un Miniſtro illuminato, la cui memoria sarà sempre nella patria noſtra onorata, Pompeo Neri Presidente dell' Imperial Consiglio di Reggenza, fu il primo che opponesse una mano soccorrevole alla sua rovina. Fra i mezzi che pose in opera a queſto effetto, uno dei più efficaci fu quello di collocare nelle sue Cattedre delle persone di un vero merito; e fra queſte Guido non poteva rimanere obliato. Di tutte le scienze che aveva Egli coltivate con applicazione e con trasporto, quella scien-

za sovrana che è la morale delle nazioni, e la legge di coloro che non hanno per giudice altri che Dio, era ſtata dalla sua tenera gioventù la sua prima scelta, ed il suo più coſtante amore. Queſta si fu dunque la scienza che, richieſto di voler essere uno degli iſtitutori della sua patria, domandò iſtantemente di poter insegnare ai suoi concittadini. Il Neri glie lo promise: ma non avendo avuto poi luogo l' erezione di una tal Cattedra senza altrimenti consultarlo lo fece scriver su i Ruoli Professore d' Iſtituzioni civili. Guido ondeggiò alquanto: ma pure fece cedere la sua repugnanza al dover di suddito e di cittadino, ed accettò.

Ai noſtri più riputati causidici, ſtati in gran parte suoi scolari, si conviene più che a me il render giuſtizia al modo con cui per ben diciott' anni ne soſtenne l' incarico. Si rammentano essi bene il pregio de' suoi metodi, la elegante precisione del suo ſtile, la chiarezza delle sue esposizioni, la sua pazienza, la sua dolcezza, nella iſtruzion familiare, e soprattutto l' arte rara di conciliare alla sua scienza l' Ingegno e la Ragione, recalcitranti l' uno e l'altra al giogo della semplice autorità. Hanno ancor fama le sue *Prelezioni*, e le sue *Lauree*; sorta di eloquenza queſte in quel tempo proſtituita all' inezia ed all'adulazione, e che Egli ricondusse nei sentieri della iſtruzione e della dignità.

Nè quì si fermarono i servigi da Lui renduti alla Università ed alla cultura sanese in generale. Ben vel sapete, o Fisio-Critici: queſta voſtra Accademia, tanto benemerita della filosofia, e che tiene un poſto così diſtinto fra le società scientifiche italiane, riconosce da Esso il suo risorgimento, e quasi una seconda iſtituzione. Dopo la morte dell' illuſtre suo fondatore (1), e del primo suo generoso mecenate (2), le medesime disgrazie che minacciavano il deſtino della Università aveano pur'anco interrotto i suoi lavori e le sue adunanze; tanto che queſto luogo, già sì celebre, rimaso allora in abbandono, appena saper poteasi chi ne fosse il cuſtode. Ma Guido non disperò della sua salvezza, e ciò solo fu per essa un principio di vita. Radunò quanti vivevano ancora degli antichi membri dell'Accademia, teſtimoni del suo primiero splendore; eccitò in essi la loro sopita attività; procurò che a queſti si unissero i pubblici Professori delle scienze; e finalmente per ope-

O o ij ra

(1) Pirro Maria Gabbrielli, valente Medico e Filosofo che sul cadere del secolo decimo settimo iſtituì queſt'Accademia, a similitudine di quella del Cimento di Firenze, e ne ornò la sala con una delle prime Linee meridiane che fossero coſtrutte in Italia, precisamente nel tempo in cui il Casini disegnava quella di S. Petronio di Bologna.

(2) Girolamo Landi, ricco e colto Gentiluomo Sanese, che secondò coi propri danari l'impresa del Gabbrielli.

ra sua si tenne quella memorabil sessione dei 29 Aprile 1759, che è l' Era della moderna Accademia Fisio-Critica, alla quale venne allora ascritto quanto la città nostra conteneva di culto e di studioso: L'Arcidiacono Sallustio Bandini, soggetto, in quel tempo, per età, per grado, per meriti, e per la considerazione che godeva presso il Governo, il più ragguardevole della città, fu per unanime consenso acclamato Principe dell'Accademia; e il Savini gli fu congiunto in qualità di Assessore.

Io non proseguirò a narrare in faccia vostra quello che Voi medesimi avete fatto o ricevuto di onorevole dentro a questo recinto: come Pompeo Neri testificasse per l' organo di Guido la sua compiacenza per la felice restaurazione dell'Accademia; come Egli stesso le impetrasse dal Sovrano dei mezzi di sussistenza e d' incoraggimento; come molti stranieri filosofi di chiarissima fama si recassero a onore d' esservi ascritti; come s' incominciasse la stampa degli Atti, insino al giorno d' oggi continuata: nelle quali cose tutte Guido si adoperò efficacemente per il vantaggio e decoro di questa compagnia. Solamente rammenterò che alla morte seguita nel 1760 dell'Arcidiacono Bandini, Guido ne lesse pubblicamente l' Elogio, composto sulla maniera del celebre Fontenelle; che nel 1764 fu egli medesimo eletto Principe dell' Accademia; e che vi presedè fino al 1771, quando in seguito della sua rinunzia, il chiarissimo Baldassarri gli fu dato per successore.

Non vuolsi qui passare sotto silenzio, uno scritto composto in questi anni da Guido; il più analogo, fra tutti gli altri, all'oggetto di quest' Accademia, allo studio principalmente, delle cose fisiche indirizzata. Io parlo della Memoria filantropica da Lui presentata al Collegio dei Medici su i mali correnti l'anno 1767, da Esso attribuiti alla carestia, ed agli stenti di una gran parte della plebe: Memoria che da uno dei nostri migliori Medici (1) viene considerata come un modello della maniera di maneggiare simili temi; specialmente in quella parte ove separa le vere dalle false cagioni dei mali, e le primarie dalle *accrescitive*.

Ma egli è tempo oggimai di ricordarvi i suoi pregi in qualità d' oratore; pregi che vivono nella memoria e nel cuore di chiunque l' ha udito, ma che, per mancanza di pubblicità data sin quì a' suoi scritti, non sono, fuori della limitata sfera de' suoi ascoltatori, abbastanza conosciuti.

I vantaggi che la nostra Lingua ha sopra gli altri moderni idiomi sono caramente pagati dalla difficoltà di prevalersene. La copia del-

(1) Il Dottor Domenico Battini, Professore di Medicina pratica nella nostra Università, è morto l' anno dopo la lettura di questo Elogio.

delle sue voci esige una finezza estrema di gusto e di criterio, per farne la scelta; la libertà de' suoi modi un genio inventore ed ardito, che sopporti il giogo dell' ordine e della misura; le varietà degli accenti e de' suoni un'arte ed una delicatezza infinita, per regolarne la successione, così che la durezza non generi il disgusto, o la uniformità il fastidio, ed insieme una tal cautela, che la tirannia dell' orecchio non abbia da estendersi sopra il pensiero, con scapito della giustezza e della precisione. La eloquenza italiana ha, come la latina da cui nasce, un meccanismo suo proprio e particolare, una specie di metro, che per non essere così compreso da certe leggi, come quello della poesia, non è per questo meno sensibile, o meno necessario ad osservarsi; e quantunque da se solo non formi che la minor parte dei talenti dell' oratore, ogni grave trascuranza di esso basta a deturpare la espressione dei pensieri i meglio concepiti ed ordinati. Questa è quell'arte troppo negletta dai moderni, ed a cui i nostri antichi limitarono forse troppo le loro cure, per cui la loro orazione, su qualunque soggetto ancor frivolo che si aggiri, diletta pur sempre per la variata equabilità del suo corso, che non mai discorda dalla gradazione delle idee, che non si accelera nè si allenta senza ragione; che non si slancia per cader tosto, e poi nuovamente rialzarsi, che non lascia trasentire, nè sforzo, nè intoppo, nè pena, ed in cui l'anima, in vece di un dolce esercizio, non trova una fatica, o in vece di un riposo un letargo.

Io non so se vi sieno molti scrittori, specialmente di questi nostri ultimi tempi, che possiedano quest' arte in tutta la sua estenzione al pari del Savini. Ma non è questo il suo solo pregio; nè lo impiega Egli ad abbellir delle ciance, o a dar corpo ai nienti. i suoi argomenti sono sempre degni della sua voce; ed Ei li sostiene con tutti i presidj della erudizione e della filosofia. Quanto al genere della sua eloquenza, ella è per l' ordinario piuttosto ornata e soave, che fervida e impetuosa: ma quando il soggetto lo comporta o lo esige, allora la sua maniera s' ingrandisce, il suo stile si riscalda, e fa ben giudicare che l' Isocrate della Toscana avrebbe potuto esserne facilmente il Demostene.

Ma i tempi più felici per la quiete e la prosperità degli stati non lo sono similmente per la eloquenza, che nasce e si fortifica nei dubbi emergenti, e fra le contrastanti passioni. La Toscana immersa in una profonda pace, libera da esterni pericoli e da interne agitazioni, regolata con leggi filosofiche da un Governo saggio e tranquillo, non era un teatro adattato a quella eloquenza che agita i grandi interessi dei popoli, e tiene in sua mano la vita e le fortune dei cittadini; e le scienze intellettuali e fisiche, che erano allora, e sono sempre poi state in onore, non ammettono per

lor

lor compagna che l'eloquenza la più tranquilla e la più moderata. Ciò rende ragione, non solo del genere a cui si attenne il Savini, ma ancora della scarsezza delle sue oratorie produzioni: poichè, lontanissimo da ogni ambizione letteraria, Egli non ha mai scritto o ragionato pubblicamente, se non se per animare gli ſtudi, o per adempiere a qualche pubblico o privato dovere.

Due sono le Orazioni ſtate da Lui pronunziate per l'aprimento delle patrie scuole. La prima l'anno innanzi ch' Ei fosse fatto pubblico Professore, ripetuta alquanti anni dopo, per comando della Imperial Reggenza; l'altra quasi immediatamente dopo la sua elezione. L'applauso che ambedue riscossero non si contenne ne' limiti della noſtra città; e quantunque fosse eccitato in parte dalla maeſtria e dalla grazia, che avea inimitabile nel pronunziarle (nel che gli antichi riponevano una condizione sì principale della eloquenza), pur non di meno l' effetto che allora produssero si accresce anzi e si rinforza alla prova di una meditata lettura.

La prima di argomento popolare, in certo modo, fra i Letterati, come quella che aggiravasi sulla tanto famosa queſtione *dei beni e dei mali della cultura*, e che aveva allora tutta la freschezza e gli allettamenti della nuovità, fu altresì quella che riportò il successo più splendido e universale. Allorchè tal queſtione fu propoſta la prima volta alla discussione dei dotti, il filosofo ginevrino scelse la tesi la più adattata a sorprendere, e la più difficile a soſtenere. Ma dopo essere ſtata trattata dalla seduttrice sua penna, la difficoltà e l'onore ſtava nel difendere la tesi oppoſta. Tanto di fatti intrapresero molti chiarissimi ingegni: ma mentre altri si affaticavano a sciogliere il nodo, Guido si attenne al partito, più confacente alla circoſtanza, di provarsi a reciderlo. Egli innamorò talmente delle attrattive della Scienza i suoi ascoltatori, che il lor medesimo cuore ne fosse, presso la loro ragione, il più possente avvocato.

L' oggetto della seconda Orazione è ancor più grave ed importante. Moſtra ella alla ſtudiosa gioventù, sovente animata da troppo ardore d' inoltrarsi senza la debita preparazione nel labirinto delle varie scienze, moſtra, io dico, lo ſtudio della ragione e delle sue forze come l' unico filo capace di prevenirne lo smarrimento. In queſta Orazione fa grande onore a Guido l'essersi incontrato con molti de'suoi pensieri in quelli del più gran Metafisico che sia stato da Locke in poi (1), e le cui dottrine non erano in Italia per anco conosciute.

Queſt'

---

(1) L' Abate di Condillac.

Queſt' Accademia anch' essa, oggetto lungamente delle sue più tenere affezioni, guſtò sovente i frutti della sua facondia; mentre, presedendo alle voſtre illuſtri fatiche, o queſte iſtesse ſtimolava ed incoraggiva; o ne celebrava i successi, o proponeva al voſtro esame dei dubbi filosofici, e delle interessanti queſtioni; o finalmente, presentandovi le voſtre moderne leggi fregiate della impronta della sovrana Autorità, esaltava alle voſtre menti la dignità delle letterarie associazioni, e additava l' immenso intervallo che separa, nella carriera del Vero, il solitario filosofo, e il filosofo in società (1).

Finalmente nell'anno 1765, anno funeſto per la perdita di un Sovrano giuſtamente amato, Egli fu scelto fra tutti i suoi concittadini, come il più capace di degnamente esprimere il pubblico dolore; e pose il termine, e per così dire il faſtigio, ai suoi oratorj esercizi, con quella celebrata Orazione (2), in cui tanto inalzossi sopra la consueta sua soavissima maniera, e che tal commozione produsse nell' immenza folla degli uditori, come se l' infauſto avvenimento allora appunto sugli occhi loro si rinnuovasse, specialmente quando lasciolli con quella patetica e sublime reticenza, paragonabile a quel velo che un pittor greco gettò sul volto di Agamennone presente al sacrifizio d' Ifigenia.

Saliva intanto sul trono della Toscana quel Principe che in un piccolissimo ſtato seppe fissare sopra di se gli sguardi di tutta l'Europa; che meritò dal mondo il nome di filosofo, e dai filosofi quello di Grande; che infaticabile nella sua applicazione, quanto vaſto ne' suoi disegni, nulla credeva indegno della maeſtà del trono di ciò che poteva essere ai sudditi vantaggioso. Fino dai primi momenti del suo governo, rivolse Egli il suo sguardo animatore a queſta preziosa porzione de' suoi Stati: e mentre facea rifiorire al di fuori delle noſtre mura le campagne deserte e inselvatichite, e conduceva al di dentro il buon' ordine, l' induſtria, l' abbondanza, e le altre benedizioni del viver civile, pensava pur'anco ai mezzi di riporvi nell'antico onore le Lettere e le scienze, che ne sono il presidio e l'ornamento. Vide che i pubblici ſtudi, non oſtante il molto che si avea fatto per ravvivarli, non erano per anche giunti a quello ſtato felice in cui li bramava; e che a queſto si opponevano diversi inconvenienti, che si applicò toſto a rimuovere o a mitigare. Trovò il primo ed il maggiore di essi nella coſtituzione medesima della Università, a cui presedeva un Capo puramente economico, assi-

(1) Altrettanti soggetti di vari Ragionamenti pronunziati da Guido nell' Accademia Fisio-Critica.

(2) Orazion funebre di Francesco I. Imperatore.

assiſtito soltanto per l'apparenza da una Deputazione letteraria. Conobbe che a queſto fiacco ed insufficiente governo conveniva soſtituire un governo vigilante ed attivo. Era d'uopo di un Capo che fosse uomo di Lettere, poichè preseder doveva a un Corpo di letterati, ma non così addetto a qualche scienza o siſtema particolare, che tutto il reſto delle dottrine trascurasse e avesse a vile; che alla universalità delle cognizioni accoppiasse una riputazione capace d'imprimer rispetto ad uomini per se ſtessi di rispetto degnissimi; che sapesse colla soavità dello spirito e delle maniere guadagnare su gl' ingegni quell' ascendente che non si ottiene coll'autorità. Un tal' uomo, per buona sorte, viveva tra noi; e l' occhio perspicace di LEOPOLDO seppe discernerlo nella volontaria oscurità, di cui la sua modeſtia avealo circondato. Un'Ordine sovrano non preveduto nè bramato trasse Guido nel 1777 alle abituali occupazioni della sua scuola, per affidargli la general direzione dei pubblici ſtudi, col titolo per noi nuovo di *Provveditore*.

Dovrò io farmi adesso per ordine a narrare tutti i vantaggi che la sua ammirazione ha prodotto nei diversi rami di queſto ſtabilimento. O pure trattandosi di cose tanto recenti, e delle quali molti di Voi che quì mi ascoltate sete ſtati non pur teſtimoni, ma zelanti cooperatori, baſterà accennarli alla voſtra riconoscente memoria? Si videro dopo quel tempo meglio diſtribuite le pubbliche lezioni, le cattedre ripiene di dottissimi Professori, molti vecchi abusi eſtirpati, il merito ricompensato e diſtinto, pullulate in diversi generi di scienza le scoperte, e le Opere accreditate, l' orto bottanico creato, la biblioteca accresciuta, i coſtumi della ſtudiosa gioventù poſti sotto la tutela di savie leggi; le quali cose tutte, se sono ſtate di somma lode per molti membri della Università, non potrebbe senza ingiuria fraudarsi di quella parte di onore che se gli aspetta il provido e zelante regolatore sotto i cui auspicj si sono esse operate.

Ed in vero LEOPOLDO, giudice severo ed illuminato de' suoi Miniſtri, non cessò mai di dargli dei contrassegni di una non ordinaria considerazione. Lo consultava, non solo su quanto interessava le scienze in Siena, ma ancora su tutte le riforme che meditava nella iſtruzion pubblica de' suoi Stati: e sia che le cure del suo governo lo guidassero fra queſte mura; sia che i bisogni della Università traessero Guido appiè del trono; Lo accoglieva più da amico che da Sovrano, lo ammetteva alla propria mensa, lo visitava in sua casa, e si tratteneva seco in lunghi e familiari colloqui, sovente alla viſta di un Pubblico spettatore. E' da notarsi che di queſto favore, messo sovente per altri alla prova, Guido non si prevalse giammai per se medesimo: ma contento del limitato emolumento assegnatogli fin da principio, con quello si rimase

sino

sino alla morte. Solamente negli ultimi anni della sua vita, il Real FIGLO e Successore di LEOPOLDO nel Granducato, troppo ripieno di Virtù per non onorarla in altrui, si compiacque di conferirgli una Commenda del suo Real Ordine, colla facoltà, da Lui non usata, di vestirne le insegne.

Guido avea sposato nel 1770 una fanciulla amabile e virtuosa, per nome Maria-Ortensia Bandini, di onesti natali, ma priva di beni di fortuna. Aveva per altro tenuto impenetrabilmente occulto il suo matrimonio, rispettando l' opinione de' suoi fratelli, che non presumeva favorevole. Ma nel 1780, essendo rimasto il solo di sua famiglia, però che in questo intervallo i suoi fratelli eran morti senza descendenza, palesò il secreto del suo cuore, e fece conoscere e rispettare per sua consorte quella che da tanto tempo ne aveva il carattere. Quantunque non ottenesse da questa unione il contento che si era proposto di aver dei figli, trovò niente di meno in essa la sua felicità sino agli ultimi momenti della sua vita, e la sua consolazione nelle disgrazie.

Imperciocchè, dopo aver mostrato la sua virtù nelle cose prospere e tranquille, gli rimaneva ancora di cimentarla alla prova dell'avversità. I disastri del suo patrimonio, che avevano avuto origine dalla troppo splendida generosità di Bernardino suo fratello maggiore, non si erano punto diminuiti, anzi si andavano ogni giorno dilatando, per la sua propria non meno illimitata, benchè più modesta, beneficenza. Egli neppure ardiva di misurarne l' ampiezza, temendo di dover restringere, non le proprie sue spese, che erano state sempre temperate dalla moderazione e dalla filosofia, ma quelle che era solito di erogare in sollievo della indigenza, o in tributo all' amicizia. Egli era inoltre, convien pur dirlo, troppo staccato dal basso interesse, e troppo invaghito dei beni dello spirito e della mente, per dar molte delle sue cure alla conservazione di quelli della fortuna; e schietto e sincero, qual' era nel fondo del suo cuore, non sapeva diffidare abbastanza, nè stare in guardia contro l'altrui doppiezza. Venne finalmente il momento in cui bisognò opporre dei rimedi dolorosi alla total rovina che gli soprastava. Guido li abbracciò con coraggio; e sollecito soltanto che altri non fosse per partecipare alla sua disgrazia, sostenne con eroica rassegnazione, e con serenità d'animo imperturbabile, il passaggio dalla opulenza alla più positiva mediocrità. Sperimentò allora in se medesimo quella nobile verità che avea proclamata con tanto entusiasmo nel fine della sua prima Orazione; esser, cioè, l' uomo che ha coltivato il suo spirito, non per ambizione o per interesse, ma per amore della virtù, inaccessibile ai colpi della fortuna, e trovare in se stesso il rimedio a tutte le sciagure.

Infatti Egli non fu meno felice allora, di quel che lo fosse ai

tempi più floridi e fortunati. Essendo stato temperante e modesto in tutte le circostanze della sua vita, non ebbe da imporsi veruna nuova privazione. Ridotto a dover misurare la propria liberalità, fu liberale con più scelta, e (poichè ciò che dava aveva per Esso un maggior valore) con più sentimento ancora di questa virtù. Tutto il tempo che gli rimaneva libero dall' esercizio del suo impiego, lo passava in una semplice ma deliziosa villetta suburbana, la sola che si fosse riserbata fra tutte le avite possesioni. La sua stimabil compagna divideva seco e gli rendeva più cara la sua solitudine. Quivi piacevolmente si tratteneva nella contemplazione della Natura, e nelle arti preziose che la rendon feconda. Ma la sua più assidua e quasi unica occupazione era nei pensieri della religione; di quella religione che avea succhiata col latte, amata mai sempre nella sua gioventù, profondamente studiata nella età matura, e che faceva adesso tutta la consolazione della sua vecchiezza.

La severità di questi pensieri non escludeva da Lui l'amore dei belli studi, che avean fatto la sua gloria e la sua delizia. Ne aveva soltanto santificato l'uso, facendoli unicamente servire di stimolo alla pietà, e d'ornamento alla religione.

Alessandro suo fratello, dottissimo, come ho già detto, in ogni genere di sacra e profana erudizione avea voluto, nella sua età provetta, congiungervi ancora la perfetta intelligenza della Lingua ebraica, e sue ausiliari, al solo intento di far gustare all' Italia una poetica ma rigorosa versione dei Salmi di Davidde, e degli altri ispirati cantori delle glorie di Dio. Quest' Opera doveva essere, in certa guisa, commune fra i due fratelli, ricevendo da Alessandro tutta la fedeltà del sentimento, e da Guido tutta la eleganza della poesia. Il primo aveva appunto eseguito il suo getto, con versi, al suo solito, stretti e gravi, ma piuttosto austeri ed incolti, allorchè la morte, accelerata forse dalle estreme fatiche che si era per questo addossate, venne a rapirlo. Guido che in Esso avea perduto la sua luce, il suo appoggio, la sua cauzione, tenne per molti anni le mani sospese sopra il lavoro. Tremava nel pensiero di riandar solo un cammino dove una sola orma perduta poteva traviar per sempre i suoi passi. Ma richiamato dalla voce dell'avversità a considerar più profondamente il nulla delle cose umane, il tutto delle divine, sentì dal raddoppiato fervor del suo zelo infondersi nuove forze e nuovo coraggio. Impotente per se stesso a seguitare il fratello nella intelligenza del Testo sacro, chiamò in suo soccorso tutti i Padri della Chiesa, tutti gl' Interpreti, tutti gli Espositori: e precedendo colla cautela indispensabile in una materia ove niuna inavvertenza è leggiera, giunse, mediante una fatica che non è facile a concepirsi, a conduere la Versione di trent' otto Salmi a quel grado di perfezione che si avea ragione di aspettare da due tali ingegni.

A quest' Opera destinata a edificare l' altrui pietà ne associava soltanto un' altra diretta a nutrire la propria. Componeva per proprio uso un Manuale di preghiere e di lodi da offerirsi all' Altissimo, attinte ai fonti delle Sacre Scritture; adattata alla presente situazione del suo spirito e del suo cuore, ed espresse con una nobile e toccante semplicità di linguaggio. L' azione di un mortale che s' indirizza al suo Dio sembravagli così augusta e così solenne, ch' Ei non si accingeva mai a questo lavoro, senza dare dei segni anco esterni di un profondo raccoglimento.

Una vita sì fattamente ordinata era una continua preparazione alla morte. Si avrebbe detto che qualche occulta ispirazione glie la presagisse vicina, quando tutto agli occhi nostri pareva allontanarne il prospetto. La bontà del suo temperamento, e la sobrietà della sua vita, con aver trionfato delle infermità ora tormentose ed ora minaccevoli da lui per il passato sofferte, e di alcuni funesti sintomi che avean destato una viva inquietudine nel cuore de' suoi amici, sembravano promettergli il godimento di una prospera e prolungata vecchiezza. Ohimè! questa dolce lusinga non doveva servire che a raddoppiarci il dolore della sua perdita, facendocela parere immatura. Allorchè meno vi si pensava, mentre le facoltà del suo corpo e del suo spirito erano nel lor massimo e pieno vigore, fu colpito in tempo del pranzo, ch' Ei condiva al suo solito di vivaci ed eruditi ragionamenti, da una mortale apoplessia, che gli tolse immediatamente le forze, e la favella; la quale avendo un' istante recuperata, non se ne valse che a consolare la consorte ed i circostanti immersi nella più dolorosa costernazione. Indi un sonno profondissimo, insuperabile a tutti gli sforzi dell' arte, gli servì di passaggio alla beata eternità; essendo stata, siccome io credo, Volontà Divina che fosse esente dalle angosce dell'agonia Quegli che si era innanzi tratto sì ben disposto ad incontrarla.

Così terminò la notte dei 15 Marzo 1797 la sua vita terrena, in età di settant'otto anni, otto mesi, e dodici giorni, GUIDO SAVINI; Uomo che merita d' esser contato fra i più illustri che questa patria abbia prodotti, ed alla cui più estesa celebrità non è mancato che l' ardore di conseguirla. Egli amava le Lettere per loro stesse, non per la fama che procurano, o per gl' istrumenti che qualche volta somministrano all'ambizione. Dissimile da quell' antico filosofo che avrebbe ricusato il dono della scienza, se gli si fosse vietato il mostrarla, sapeva goderne dentro di se medesimo, ed esserne liberale soltanto con chi sinceramente la ricercava. Il simile può dirsi della sua virtù. Egli la seguiva per cuore ancor più che per dovere, o per forza di ragionamento. Era quindi virtuoso senza sforzo, e per conseguenza senza fasto, e senza affettazione. Un sentimento della medesima specie aveva mantenuto la

sua pietà inconcussa fra 'l commercio dei liberi pensatori e dei loro scritti. Nella scelta delle amicizie, una occulta simpatia gli facea sempre preferire quella degli sventurati. Dotato di uno spirito conciliatore, ne ha fatto sovente uso per mantenere la concordia fra i buoni, e ricondurre la quiete nel seno delle famiglie agitate. I suoi costumi erano semplici, come sempre lo sono quelli dei veri grand' uomini; facilissimo il suo commercio. Sapeva l'arte di mettersi a portata di tutti gli spiriti, e non isdegnava la conversazione degl' idioti, e persino dei fanciulli. Osservatore sottilissimo dello spirito umano, trovava un' ampia messe di utili riflessioni, dove gli altri non sanno raccogliere che la noja e il disgusto. Ciò rendeva oltremodo vario ed interessante il suo ragionare, che le grazie inimitabili onde lo accompagnava facevano sempre trovar troppo breve. Tenace alquanto delle sue opinioni, perchè abbracciate con ponderazione, ed esposte con ingenuità, le sosteneva con calore, ma non con arroganza. Era pazientissimo nel dolore e nella infermità. Non dispregiava i commodi e gli onesti piaceri; ma la loro mancanza non è mai giunta a turbar la sua quiete. Il suo esteriore annunziava i pregi della sua anima. Una fronte serena, un' occhio fino e penetrante, una fisonomia dolce insieme ed animata, prevenivano in suo favore, e gli tenevano luogo di bellezza. Il suo portamento era nobile e misurato, il suo gesto grazioso, la statura mediocre, snella e robusta la persona. Visse caro a tutti i buoni, e specialmente ai poveri, e agl' infelici. La sua stirpe non si è conservata che per mezzo di una sua sorella, della cui posterità ha avuto la sodisfazione di veder popolate molte delle primarie Case della sua patria, persino alla quarta generazione. Le sue ultime disposizioni sono state degne della sua saviezza; avendo saputo trovare nelle tenui reliquie della sua fortuna i mezzi di rendere ciò che doveva all'amor conjugale, al sangue, alla pietà, e persino alla conservazione di un Nome che rammenterà perpetuamente alla patria i pregi e le virtù di chi lo ha sugli occhi nostri sì chiaramente illustrato.

Fine del Tomo VIII.